Math. P.
222
(1.

Math. P. 222(1

Hirsch

Math. P 222

Mathem.
Geom. appl. R
449

Sammlung
geometrischer Aufgaben

von

Meier Hirsch,

Privatlehrer der Mathematik.

Erster Theil.

Berlin,

bey Heinrich Frölich. 1805.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ich übergebe hier dem Publikum die, in meiner Sammlung algebraischer Aufgaben und Formeln angekündigte Fortsetzung, nämlich den ersten Theil der geometrischen Sammlung, in der Voraussetzung, daß die erstere wenigstens nicht ungünstig aufgenommen worden sey. Nur die gütige, und für mich höchst schmeichelhafte Aufmunterung einiger, mir sehr schätzbaren Männer, konnte mich, in Ermangelung einer kritischen Beurtheilung, zu dieser Voraussetzung berechtigen, und mir das Vertrauen einflößen, daß meine Arbeiten ihre Erwartungen, wo nicht völlig befriedigen, doch auch nicht ganz täuschen werden.

Wenn Kürze mit Uebergehung alles dessen, was nicht der Zusammenhang des Vortrags nöthig macht, ein wesentliches Erforderniß eines guten mathematischen Lehrbuches ist, indem ein solches, seiner Bestimmung gemäß, nur die Grundlehren und Hauptsätze der Wissenschaft enthalten darf: so ist es ein um so größeres Bedürfniß des Anfängers, auch noch ein Buch zu besitzen,

worin er Gelegenheit findet, die erlernten Sätze praktisch anzuwenden, und sich durch Uebungen mannigfacher Art zum Lesen größerer Werke vorzubereiten. Ein Buch, wie es hier gefordert wird, muß gleichsam eine Mittelgattung zwischen den Anfangsgründen und solchen Schriften seyn, welche nur den Eingeweiheten verständlich sind, um die Lücke zwischen beyden auszufüllen. Förmliche Abhandlungen über einzelne Gegenstände sind hierzu weniger geeignet, weil dadurch der Lehrling nur einseitig gebildet wird, und bey dem anhaltenden Nachdenken, welches sie gewöhnlich voraussetzen, sehr leicht ermüdet. Fragmentarische Abhandlungen, hin und wieder durch gelegentliche Bemerkungen unterbrochen, mit steter Rücksicht auf praktische Anwendbarkeit, scheinen mir hierzu weit passender: durch diese soll ihm erst der Weg zu jenen gebahnt, und der Grund zu seinen künftigen Fortschritten gelegt werden.

Daß der geometrische Blick, wenn ich mich so ausdrücken darf, nicht weniger als die Fertigkeit des Calkuls der Uebung bedarf, wird mir jeder ohne Bedenken einräumen. Dieser Blick, wodurch der geübte Geometer eben so geschwind die Verhältnisse und Beziehungen der verschiedenen Theile einer Figur, als der geübte Rechner die Verhältnisse und Beziehungen der Zah-

len wahrnimmt, läßt sich aber nur durch Verschiedenheit der Ansichten und Mannigfaltigkeit der Behandlung erlangen. Die Geometrie und Trigonometrie, oder, wie man die letztere eigentlich nennen sollte, die Goniometrie, bietet uns hierzu reichlichen Stoff dar; es bedarf nur der Anordnung und Vereinigung zu einem Ganzen. Weitläufige und ermüdende trigonometrische Rechnungen, welche nur die Geduld, und nicht den Kopf des Lesers in Anspruch nehmen, können nicht unbedingt als Bildungsmittel des angehenden Geometers angesehen werden; sie sind es nur in Hinsicht auf höhere Zwecke, und daher nur unter dieser Bedingung zuläßlich. Rechnungen wie diese sind es, welche dem Calkul überhaupt von den gar zu ängstlichen Verehreren der Alten den ungerechten Vorwurf zugezogen hat, daß er nichts zur Bildung des Verstandes beytrage, und daß er die erhabene Geometrie zu bloß mechanischen Verrichtungen herabwürdige. Aber auch die gänzliche Trennung der so genannten geometrischen Methode von der algebraischen hat ihren nachtheiligen Einfluß auf den Geist, indem sie ihn nur an eine bestimmte Form des Denkens gewöhnt.

In wie fern die vorliegende Sammlung alle diese, zum Theil negative Forderungen erfüllet, und ob über=

haupt die abgehandelten Materien dem angegebenen Endzwecke entsprechen, getraue ich mir nicht zu entscheiden. Es war mir bey obigen Erinnerungen bloß darum zu thun, den Gesichtspunkt anzugeben, aus welchem ich diese Schrift, im Ganzen genommen, beurtheilt zu sehen wünsche.

Was nun die Aufgaben selbst betrifft: so sind solche theils aus der reinen, theils aus der praktischen Geometrie genommen, und zwar bey Letzterer mit Vermeidung alles Technischen in Vortrag und Ausdruck. So wie bey der algebraischen Sammlung, so blieb ich auch hier dem Grundsatze getreu, vom Leichteren und Einfacheren zum Schwereren und Zusammengesetzteren fortzurücken, stets der Classe von Lesern eingedenk, für welche ich schrieb. Die Schriften, welche ich benutzte, sind größtentheils angeführt, bis auf einige, welche, zur Bestrafung der Unterlassungssünde hier in der Vorrede ihren Platz finden müssen, nämlich: Schulze's Taschenbuch der Meßkunst; Schwab's Sammlung dreyßig geometrischer Aufgaben als Anhang zu Euklid's Data; T. Simpsons select Exercises for young Proficients in the Mathematicks; Klügels mathematisches Wörterbuch; auch ist Mayers praktische Geometrie nicht allenthalben

angeführt, wo es hätte geschehen sollen. Was mein Eigenthum ist, wird der Kenner wohl selbst finden.

Die Beyspiele, woran ich es eben nicht habe fehlen lassen, sind, zwey oder drey von den leichtern ausgenommen, alle neu; sie sind bloß bey den vermischten Aufgaben weggeblieben, weil ich sie nicht mehr für nöthig hielt. Bey vielen sind nur die Endresultate, mit einer kurzen Anzeige des Verfahrens hingesetzt; bey anderen, wo lange und verwickelte Rechnungen vorkommen, sind auch die Zwischenresultate angeführt. Ersparung des Raumes war hierzu der Bewegungsgrund; ob ich wohl daran that, werde ich hoffentlich zu seiner Zeit erfahren. Wenigstens kann mich der Vorwurf nicht treffen, daß es meines Vortheils, oder meiner Bequemlichkeit halber geschah. Sollte ein oder der andere meiner Leser die hierzu erforderlichen Kenntnisse noch nicht besitzen: so muß er seinen Lehrer, oder in Ermangelung dessen, einen Sachverständigen zu Rathe ziehen.

Dieser erste Theil der geometrischen Sammlung enthält übrigens nur die planimetrischen Aufgaben, oder solche, welche dazu gezählt werden können; die stereometrischen sind dem folgenden Theile vorbehalten. Manches dürfte man hier vielleicht ungern vermissen;

dahin gehört zum Theil die Lehre von den Vielecken im Kreise, welcher Gegenstand, seit der Zeit, daß Gauß die Formel für das Siebenzehneck fand, einiges Interesse erregt zu haben scheint. Die einzige Entschuldigung, die ich dieserhalb vorzubringen vermag, ist die, daß ich nichts Neues darüber zu sagen wußte; meine Leser sollen aber zu gehöriger Zeit dafür Ersatz erhalten.

Die angehängte trigonometrische Formeltafel enthält nur solche Formeln, welche im Buche selbst gebraucht werden. Die Beziehung darauf wird durch das deutsche F. angedeutet, wofür sich aus Versehen auf den ersten Bogen einigemal das lateinische F. eingeschlichen hat; es bedeutet also F. 19 die 19te Formel dieser Tafel. Bey der Anführung der geometrischen Elementarsätze bezog ich mich durchgängig auf die Lorenzische Uebersetzung des Euklides, in deren Besitz doch wahrscheinlich die meisten meiner Leser sind; die Beziehung darauf wird durch El. angedeutet, und es bezeichnet also z. B. El. III. 27 den 27sten Satz des dritten Buches der Elemente.

Berlin, den 15. Januar 1805.

Nachtrag.

Die seit dieser Zeit in einigen kritischen Blättern erschienenen, im Ganzen sehr vortheilhaften und mit vieler Schonung abgefaßten Beurtheilungen meiner algebraischen Sammlung, kamen leider zu spät, um die gemachten Bemerkungen bey der Ausarbeitung der vorliegenden benutzen zu können. Ich finde die Forderung, bey schweren Aufgaben dem Leser durch einige Winke und Fingerzeige den Weg zu ihrer Auflösung zu bahnen, sehr gerecht; daß ich dies selbst eingesehen habe, beweisen die hier aus eigenem Antriebe hinzugefügten Auflösungen und Erläuterungen: — Ob ich wohl durch das allzu emsige Streben nach Deutlichkeit in den entgegengesetzten Fehler gefallen seyn mag? —

Berlin, den 14. July 1805.

Inhalt

Seite.

I. Verwandlung der Figuren. 1

II. Theilung der Figuren durch Zeichnung. . . . 14

III. Berechnung des Flächeninhalts geradlinigter Figuren. 25

IV. Theilung der Figuren durch Rechnung. . . 42

V. Geometrische Bestimmung der Entfernungen und Höhen der Gegenstände. 53

VI. Kreisrechnungen. 89

VII. Aufgaben, mit ihren analytischen und geometrischen Auflösungen, hauptsächlich in Hinsicht auf geometrische Construktionen. 105

VIII. Polygonometrische Aufgaben. 138

Seite.

IX. Einige wichtige Aufgaben aus der praktischen Geometrie, mit vorzüglicher Hinsicht auf die Behandlung der negativen Winkel. 175

X. Vom Maximum und Minimum, in so fern dieser Gegenstand zur Elementargeometrie gehört. 215

XI. Ebene Oerter. 226

XII. Vermischte Aufgaben. 238

Trigonometrische Formeltafel. 271

Verbesserungen.

S. 61, Zeile 13 und 14, anstatt $\triangle CED = \triangle BEC$, $\triangle ACD = \triangle ACB$, lese man $\triangle CED \cong \triangle BEC$, $\triangle ACD \cong \triangle ACB$.

S. 213, Z. 9, anstatt $pt + qr$, l. m. $ps + qr$

S. 226, Z. 8, anstatt einzelne, l. m. einzelnen

In der angehängten Formeltafel ist aus Versehen $\text{Cot.}\,\varphi = \frac{\text{Cos.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi}$ ausgelassen worden, und da die Beziehungs-Nummern im Werke selbst nicht mehr abgeändert werden konnten: so ist diese Formel zwischen die zweyte und dritte mit der Marque *2 eingeschoben worden. Dem möglichen Irrthum ist hierdurch in so weit vorgebeugt, daß man nur da, wo sich eine Beziehung auf die zweyte Formel befindet, entweder 2, oder *2 zu verstehen hat.

I. Verwandlung der Figuren.

§ 1.

Aufg. Ein gegebenes Viereck in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze sich in einer gegebenen Ecke der Figur befinde, und dessen Grundlinie längs einer Seite derselben falle.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 1 und 2) das gegebene Viereck; das Fig. 1 hat lauter auswärts gehende Winkel, und das Fig. 2 einen einwärts gehenden Winkel BCD; die Spitze des ihm gleichen Dreyecks soll in B fallen.

1) Man ziehe (Fig 1 und 2) die Diagonale BD, und ihr parallel aus C die Linie CE.

2) Aus E, wo diese Parallele die Linie AD (Fig. 2), oder ihre Verlängerung (Fig. 1), schneidet, ziehe man die Linie EB, so wird $\triangle$ ABE = Viereck ABCD seyn.

Beweis. Da CE ‡ BD, so ist (Fig. 1 und 2) $\triangle$ BCD = $\triangle$ BED; folglich

in Fig. 1

$$\triangle ABD + \triangle BCD = \triangle ABD + \triangle BED$$

oder, Viereck ABCD = $\triangle$ ABE,

und in Fig. 2

$$\triangle ABD - \triangle BCD = \triangle ABD - \triangle BED$$

oder, Viereck ABCD = $\triangle$ ABE

Zus. Ist in dem Vierecke (Fig. 1) die Seite BC der ihr gegenüber liegenden Seite AD parallel, so ist BCED ein Parallelogramm, also BC = DE, und daher AE = AD + DE = AD + BC. Für diesen Fall ist also die Grundlinie AE des Dreyecks ABE die Summe der beyden parallelen Seiten. Ist ABCD ein Parallelogramm, so hat man AD = BC = DE, und daher AE = 2 AD.

§ 2.

Aufg. Ein gegebenes Fünfeck in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze in eine gegebene Ecke des Fünfecks, und dessen Grundlinie längs einer Seite desselben falle.

Aufl. Es sey ABCDE (Fig. 3. 4. 5) das gegebene Fünfeck; die Spitze des ihm gleichen Dreyecks soll in C fallen.

1) Man ziehe aus C die Diagonalen CA, CE.

2) Aus B ziehe man die BF der CA, und aus D die DG der CE parallel.

3) Nach F und G, worin diese Parallelen, die AE oder ihre Verlängerung schneiden, ziehe man die Linien CF, CG; so wird CFG das verlangte Dreyeck seyn.

Beweis. Für alle drey Figuren ist

$$\triangle CBA = \triangle CFA,\ \triangle CDE = \triangle CGE$$

Daher ist

1) für Fig. 3

$\triangle CAE + \triangle CBA + \triangle CDE = \triangle CAE + \triangle CFA + \triangle CGE$,
oder da $\triangle CAE + \triangle CBA + \triangle CDE =$ Fünfeck ABCDE,
und $\triangle CAE + \triangle CFA + \triangle CGE = \triangle CFG$;
so ist Fünfeck ABCDE $= \triangle CFG$.

2) Für Fig. 4.

$\triangle CAE - \triangle CBA - \triangle CDE = \triangle CAE - \triangle CFA - \triangle CGE$,
oder da $\triangle CAE - \triangle CBA - \triangle CDE =$ Fünfeck ABCDE,
und $\triangle CAE - \triangle CFA - \triangle CGE = \triangle CFG$;
so ist Fünfeck ABCDE $= \triangle CFG$.

3) Für Fig. 5.

$\triangle CAE - \triangle CBA + \triangle CDE = \triangle CAE - \triangle CFA + \triangle CGE$,

oder da $\triangle CAE - \triangle CBA + \triangle CDE =$ Fünfeck ABCDE,

und $\triangle CAE - \triangle CFA + \triangle CGE = \triangle CFG$;

so ist Fünfeck ABCDE $= \triangle CFG$.

§ 3.

Aufg. Eine jede gegebene Figur in ein Dreyeck zu verwandeln, dessen Spitze auf eine bestimmte Ecke der Figur, und dessen Grundlinie längs einer ihrer Seiten fällt.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 6 und 7) die gegebene Figur, hier ein Sechseck, und A die Ecke derselben, auf welche die Spitze des gesuchten Dreyecks fallen soll. Mehrerer Deutlichkeit wegen, will ich die Ecken und Seiten der Figur von A an zählen, und A die erste Ecke, B die zweyte, C die dritte, D die vierte, u. s. w. nennen; ferner AB die erste Seite, BC die zweyte, CD die dritte, DE die vierte, u. s. w. Es läßt sich alsdann folgende allgemeine Auflösung geben:

1) Man ziehe aus A nach allen Ecken der Figur die Diagonalen AC, AD, AE, die man ebenfalls nach der Ordnung, wie sie auf einander folgen, die erste, zweyte, dritte Diagonale nennen kann.

2) Man ziehe hierauf aus der zweyten Ecke B eine Linie der ersten Diagonale AC parallel, aus dem Punkte a, wo diese Parallele die dritte Seite CD (Fig. 7) oder ihre Verlängerung (Fig. 6) trifft, ziehe man eine Linie ab der zweyten Diagonale AD parallel, und aus dem Punkte b, wo diese die vierte Seite DE (Fig. 7) oder ihre Verlängerung (Fig. 6) trifft, wieder eine Linie bc der dritten Diagonale AE parallel.

3) Man fahre auf diese Art so lange fort, bis keine Diagonale mehr vorhanden ist, und ziehe aus dem zuletzt gefundenen Durchschnittspunkt der Parallelen und Seiten, hier c, die

Linie cA, so wird AcF das verlangte Dreyeck seyn, dessen Spitze in A, und dessen Grundlinie längs EF fällt.

Beweis.

Für Fig. 6.

1) $\triangle ABC = \triangle AaC$ (weil Ba # AC)

folglich $ACDEF + \triangle ABC = ACDEF + \triangle AaC$

oder Sechseck ABCDEF = Fünfeck AaDEF

2) $\triangle AaD = \triangle AbD$ (weil ab # AD)

folglich $ADEF + \triangle Aad = ADEF + \triangle AbD$

oder Fünfeck AaDEF = Viereck AbEF

3) $\triangle AbE = \triangle AcE$ (weil bc # AE)

folglich $\triangle AEF + \triangle AbE = \triangle AEF + \triangle AcE$

oder Viereck ABEF = $\triangle AcF$

Für Fig. 7.

1) $\triangle ABC = \triangle AaC$ (weil Ba # AC)

folglich $ACDEF - \triangle ABC = ACDEF - \triangle AaC$

oder Sechseck ABCDEF = Fünfeck AaDEF

2) $\triangle AaD = \triangle AbD$ (weil ab # AD)

folglich $ADEF + \triangle AaD = ADEF + \triangle AbD$

oder Fünfeck AaDEF = Viereck AbEF

3) $\triangle AbE = \triangle AcE$ (weil bc # AE)

folglich $\triangle AEF - \triangle AbE = \triangle AEF - \triangle AcE$

oder Viereck AbEF = $\triangle AcF$

Man hat daher für beyde Figuren, Sechseck ABCDEF = Fünfeck AaDEF = Viereck AbEF = $\triangle AcF$.

Erste Anmerk. Obgleich hier die Auflösung nur für ein Sechseck gegeben worden, so läßt sie sich doch leicht auf jede andere Figur ausdehnen. Alles beruhet auf der Substitution eines Dreyecks für ein anderes vermittelst der Parallelen, wobey man nur darauf zu sehen hat, daß eine Seite des substituirten Dreyecks auf eine Seite der Figur oder auf ihre Verlängerung fällt, weil dadurch die Anzahl ihrer Seiten vermindert wird. Uebrigens ist es nicht durchaus nöthig die

Parallelen wirklich zu ziehen; man darf nämlich nur die Punkte bemerken, wo solche die zugehörigen Seiten oder ihre Verlängerungen schneiden, weil alles bloß auf die Bestimmung dieser Durchschnittspunkte ankommt.

Zweyte Anmerk. Eine bloße Ansicht der Auflösungen und Beweise in § 1, 2 und 3, läßt eine gewisse Uebereinstimmung zwischen den Figuren mit aus- und einwärts gehenden Winkeln bemerken, vermöge welcher sich die Auflösungen und Beweise, fast wörtlich von einer Figur auf die andere übertragen lassen. Der ganze Unterschied bestehet bloß in den Vorzeichen + und —, oder im Zusetzen und Abnehmen.

Erst. Zus. In der Figur ABCDEF (Fig. 8) ereignet sich, wenn man E für die Spitze des gesuchten Dreyecks annimmt, der Fall, daß die Seite BC der Figur mit der Diagonale EC in gerader Richtung liegt. Wollte man nun nach obigen Vorschriften verfahren, so müßte man durch D eine Linie der EC parallel ziehen, welche aber die BC nirgends treffen würde, wie doch zur weiteren Construktion erfordert wird. Diesem Umstande kann aber leicht abgeholfen werden, wenn man vor der Anwendung der gegebenen Regeln den einwärts gehenden Winkel BCD wegschafft. Ziehet man nämlich die Diagonale BD, und Ca ihr parallel, so ist, wenn Ba gezogen wird, △CBA = △CDa, und daher Figur ABaEF = Figur ABCDEF. Dieses Wegschaffen der einwärts gehenden Winkel kann auch selbst alsdann mit Vortheil angewendet werden, wenn die Durchschnittspunkte der Parallelen und Seiten gar zu weit außerhalb der Figur fallen, und daher die Zeichnung zu viel Platz wegnehmen würde.

Zweyt. Zus. Soll die Spitze des Dreyecks nicht nur auf eine gegebene Ecke der Figur, sondern noch überdies die Grundlinie des Dreyecks längs einer bestimmten Seite der Figur fallen, wie z. B. wenn man das Achteck ABCDEFGH

(Fig. 9) in ein Dreyeck verwandeln wollte, dessen Spitze in D, und dessen Grundlinie längs AH fällt, so kann man auf folgende Art verfahren. Man ziehe die Linien DA, DH, so wird dadurch die Figur in drey Theile zerlegt, nämlich, in das Dreyeck DAH, in das Viereck DCBA zur Linken, und in das Fünfeck DEFGH zur Rechten desselben. Nun verwandle man nach den gegebenen Regeln das Viereck DCBA in das Dreyeck DaA, ziehe aus a die Linie ab der DA parallel, und nach dem Punkte b, wo solche die verlängerte AH trifft die Linie Db, so ist △DbA = △DaA = Viereck DCBA. Eben so verwandle man das Fünfeck DEFGH in das Dreyeck DdH, ziehe die Linie de der DH parallel und nach dem Punkte, wo solche die verlängerte AH schneidet die Linie De, so ist △DeH = △DdH = Fünfeck DEFGH. Daher ist △bDE = Achteck ABCDEFGH; die Spitze des Dreyecks fällt, wie verlangt worden, in D, und die Grundlinie längs AH. Zum vollständigen Beweise sind noch die Linien Da, De gezogen worden.

§ 4.

Aufg. Eine jede gegebene Figur in ein Dreyeck zu wandeln, dessen Spitze in einen bestimmten Punkt auf einer Seite der Figur oder innerhalb derselben falle, und dessen Grundlinie längs einer gegebenen Seite der Figur liege.

Aufl. Erster Fall. Es sey (Fig. 10) das Sechseck ABCDEF in ein Dreyeck zu verwandeln; die Spitze desselben soll in den Punkt M auf der Seite CD, und die Grundlinie längs AF fallen.

1) Man schaffe zuerst nach § 3 Zus. 1 den einwärts gehenden Winkel ABC weg, indem man das Dreyeck BCa dem Dreyecke BAa substituirt, und dadurch das Sechseck ABCDEF

in das Fünfeck aCDEF verwandelt, ziehe hierauf die Linien Ma, MF, so wird das Fünfeck aCDEF in das Dreyeck MaF, in das Viereck MDEF zur Rechten, und in das Dreyeck MCa zur Linken zerlegt.

2) Man verwandle nun das Viereck MDEF und das Dreyeck MCa in die Dreyecke MdF, Mba, so daß ihre Grundlinien längs AF fallen, so ist △ Mbd = Sechseck ABCDEF.

Zweyter Fall. Es sey ABCDEF (Fig. 11) die gegebene Figur; die Spitze des gesuchten Dreyecks soll in den Punkt M innerhalb der Figur, und die Grundlinie längs AF fallen.

1) Man ziehe aus M nach einer beliebigen Ecke der Figur, etwa D, die Linie MD, ferner die Linien MA und MF, wodurch die Figur ABCDEF in das Dreyeck MAF, und in die Figuren MDCBA, MDEF zerlegt wird.

2) Verwandle hierauf MDCBA und MDEF in die Dreyecke McA, MeF, deren Grundlinien längs AF fallen, so ist △cMe = Figur ABCDEF.

§ 5.

Aufg. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 12) das gegebene Rechteck, welches in ein Quadrat verwandelt werden soll.

1) Halbire die längste Seite AD in E.

2) Beschreibe über AD mit EA = ED den Halbkreis AGD.

3) Trage die kleinere Seite des Rechtecks AB, von A nach D in F.

4) Errichte in F auf AD das Perpendikel FG.

5) Aus dem Punkte G, wo dieses Perpendikel den Kreis

trifft, ziehe nach A die gerade Linie GA, so ist diese die Seite des verlangten Quadrates.

Bew. Man ziehe die Linie GD; so ist AGD ein rechter Winkel (El. III. 31), folglich AG die mittlere Proportionallinie zwischen AD und AF (El. VI. 8), daher (El. VI. 17) $AG^2 = AD \times AF = AD \times AB =$ Rechteck ABCD.

Anmerk. Jede Figur läßt sich in ein Dreyeck verwandeln, und jedes Dreyeck in ein Rechteck (El. I. 42), ferner jedes Rechteck, wie aus dem gegenwärtigen Satze erhellet, in ein Quadrat; folglich auch jede Figur in ein Quadrat.

§ 6.

Aufg. Ein jedes gegebene Dreyeck in ein gleichschenklichtes zu verwandeln.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 13) das gegebene Dreyeck, welches in ein gleichschenklichtes verwandelt werden soll.

1) Halbire die Grundlinie AC in D, und errichte aus D das Perpendikel DE.

2) Aus der Spitze B des gegebenen Dreyecks ziehe BE der Grundlinie AC parallel.

3) Aus dem Punkte E, wo diese Parallele das Perpendikel trifft, ziehe nach A und C die geraden Linien EA, EC, so ist EAC das verlangte gleichschenklichte Dreyeck.

Der Beweis ist sehr leicht zu finden.

§ 7.

Aufg. Ein gegebenes gleichschenklichtes Dreyeck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 14) das gegebene gleichschenklichte Dreyeck, welches in ein gleichseitiges verwandelt werden soll.

1) Setze über die Grundlinie AC des gegebenen Dreyecks das gleichseitige AEC, und ziehe durch die Spitzen E und B

beyder Dreyecke die gerade Linie EB, welche, wie bekannt, auf AC perpendikular stehet, und diese Linie in D halbirt.

2) Ueber ED beschreibe man den Halbkreis EFD, und errichte aus B das Perpendikel BF, welches den Halbkreis in F trifft.

3) Beschreibe hierauf aus D mit der Oeffnung DF einen Bogen FG, welcher die Linie DE in G schneidet.

4) Aus G ziehe die Linien GH, GI den Seiten des gleichseitigen Dreyecks AEC parallel, so wird HGI das verlangte gleichseitige Dreyeck seyn.

Bew. Da GH ⧺ EA, und GI ⧺ EC, so ist $\angle$ GHI $=$ $\angle$ EAC, und $\angle$ GIH $=$ $\angle$ ECA, folglich $\triangle$ AEC $\sim$ $\triangle$ HGI, und daher das Dreyeck HGI gleichseitig.

Denkt man sich die Linie DF gezogen, so ist DF, folglich auch DG die mittlere Proportionallinie zwischen DE und DB, und daher

$$DE : DG = DG : DB;$$

aber auch DE : DG = AD : HD, (weil $\triangle$EAD $\sim$ $\triangle$GHD)

folglich DG : DB = AD : HD,

und daher wegen des gemeinschaftlichen Winkels GDA,

$$\triangle GHD = \triangle BAD \text{ (El. VI. 15.)}$$

Aber $\triangle$GHD $=$ $\triangle$GID, und $\triangle$BAD $=$ $\triangle$BCD

folglich auch $\triangle$ABC $=$ $\triangle$HGI

Zus. Wenn BD größer als ED ist, so trifft das Perpendikel BF den Halbkreis nicht mehr. In diesem Falle darf man nur über BD den Halbkreis beschreiben, und aus E das Perpendikel errichten; dann werden aber die Punkte H, I, nicht mehr in die Linie AC selbst, sondern in ihre Verlängerung fallen.

Anmerk. Aus diesem und den vorigen §en erhellet, wie man jede beliebige Figur in ein gleichseitiges Dreyeck verwandeln könne; denn

man darf nur zuerst die Figur in ein Dreyeck, dieses Dreyeck in ein gleichschenklichtes, und das gleichschenklichte wieder in ein gleichseitiges verwandeln.

§ 8.

Aufg. Ein Quadrat zu machen, welches mehreren gegebenen Quadraten zusammen genommen gleich sey.

Aufl. Es seyen ab, cd, ef, gh, (Fig. 15) die Seiten von vier Quadraten; es wird ein Quadrat gesucht, welches so groß ist als diese vier Quadrate zusammen genommen.

1) Man mache AB = ab, und errichte auf B das Perpendikel BC = cd, ziehe AC.

2) Aus C errichte man auf AC das Perpendikel CD = ef, und ziehe AD.

3) Aus D errichte auf AD das Perpendikel DE = gh, und ziehe AE, so wird $AE^2 = ab^2 + cd^2 + ef^2 + gh^2$ seyn.

Der Beweis ist aus El. I. 47 sehr leicht herzuleiten.

Anmerk. Hieraus erhellet, wie man jede beliebige Anzahl von Quadraten in ein einziges verwandeln könne. Da sich nun jede Figur in ein Quadrat verwandeln läßt (§ 5 Anmerk.) so kann man auch jedesmal ein Quadrat finden, das mehreren Figuren zusammen genommen gleich ist.

§ 9.

Aufg. Ein Quadrat zu machen, welches der Differenz zweyer gegebenen Quadrate gleich sey.

Aufl. Es seyen ab, cd, (Fig. 16) die Seiten zweyer Quadrate; man soll ein Quadrat finden, welches ihrem Unterschiede gleich sey.

1) Man mache AB = ab und beschreibe über AB einen Halbkreis.

2) Aus B trage man in den Halbkreis eine Linie BC = cd ein, und ziehe AC, so ist AC die Seite des verlangten Quadrats.

Der Beweis ergiebt sich aus El. III. 31. und I. 47.

§ 10.

Aufg. **Es sind mehrere ähnliche Figuren gegeben; man soll eine Figur konstruiren, welche einer jeden von ihnen ähnlich, und allen zusammen genommen gleich sey.**

Aufl. Es seyen ab, cd, ef, gh, (Fig. 15) die homologen Seiten von vier ähnlichen Figuren, die zusammen in eine einzige ihnen ähnliche Figur vereinigt werden sollen.

Man setze die Linien ab, cd, ef, gh, gerade so wie in § 8 unter rechten Winkeln zusammen, und konstruire nach El. VI. 18 auf AE eine Figur, welche den gegebenen ähnlich ist; so wird diese so groß seyn, als jene vier Figuren zusammen.

Der Beweis gründet sich auf El. VI. 31, und ist daraus leicht herzuleiten.

Anmerk. Durch das angegebene Verfahren ist man also im Stande, mehrere ähnliche Dreyecke, Vierecke, Fünfecke, u. s. w. in ein einziges ihnen ähnliches Dreyeck, Viereck, Fünfeck, u. s. w. zu verwandeln. Da sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten, so läßt sich auch jedesmal ein Kreis finden, der so groß ist als mehrere gegebene Kreise zusammen. Es seyen z. B. ab, cd, ef, gh, die Durchmesser von vier Kreisen, so ist ein Kreis, dessen Durchmesser AE ist, so groß als jene vier Kreise. Verfährt man mit den Durchmessern zweyer gegebenen Kreise, wie in § 9 mit den Seiten der beyden gegebenen Quadrate, so findet man den Durchmesser eines Kreises, der dem Unterschiede dieser beyden Kreise gleich ist.

§ 11.

Aufg. **Eine gegebene Figur so zu verwandeln, daß sie einer anderen Figur ähnlich werde.**

Aufl. Es sey X (Fig. 17) die zu verwandelnde Figur und ABCDEF diejenige, welcher sie ähnlich werden soll.

1) Man verwandle die Figur ABCDEF in ein Quadrat, und die Seite desselben sey mn, so daß ABCDEF $= mn^2$; verwandle auch die Figur X in ein Quadrat, und die Seite desselben sey pq, so daß X $= pq^2$.

2) Man wähle irgend eine Seite der Figur, etwa AF, suche zu den drey Linien mn, pq und AF die vierte Proportionallinie (El. VI. 12), und trage solche auf AF; es sey Af diese vierte Proportionallinie, so daß mn:pq = AF:Af.

3) Man ziehe hierauf die Diagonalen AE, AD, AC, und die Linien fe, ed, de, cb, den Linien FE, ED, DC, CB parallel, so wird Abcdef die verlangte Figur seyn, nämlich = X und ∽ ABCDEF.

Bew. Es läßt sich leicht zeigen, daß Abcdef ∽ ABCDEF sey. Da ferner nach El. VI. 20.

	ABCDEF : Abcdef	$= AF^2 : Af^2$,
und wegen 2)	$AF^2 : Af^2$	$= mn^2 : pq^2$,
so ist	ABCDEF : Abcdef	$= mn^2 : pq^2$:
Aber wegen 1)	ABCDEF	$= mn^2$
folglich auch	Abcdef	$= pq^2 = X$.

§ 12.

Aufg. Auf die Grundlinie eines gegebenen Dreyecks ein demselben gleiches Viereck mit zwey parallelen Seiten zu setzen, deren eine die Grundlinie selbst ist, und worin der eine Winkel an der Grundlinie zugleich ein Winkel des Dreyecks, der andere aber einem gegebenen Winkel gleich sey.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 18) das gegebene Dreyeck, welches in ein Viereck verwandelt werden soll, dessen eine Seite die Grundlinie BC selbst, und eine andere ihr parallel ist, daß ferner der Winkel ABC des Dreyecks sich auch in dem Vierecke befinde, und der andere Winkel bey C dem gegebenen m gleich sey.

1) Man setze an BC den Winkel BCD = m.

2) Aus der Spitze A des Dreyecks ziehe man die AD

der BC parallel, welche die CD in D trifft, und aus B die BE der CD parallel bis an AD.

3) Ueber AD beschreibe man den Halbkreis AFD, und errichte aus E das Perpendikel EF bis an denselben.

4) Aus D beschreibe man mit DF den Kreisbogen FG, welcher die AD in G trifft.

5) Aus G ziehe man die Linie GH der DC parallel, und aus dem Punkte H, wo solche die AB trifft die Linie HI der BC parallel, so ist BHIC das verlangte Viereck.

Bem. Denkt man sich DF gezogen, so ist nach El. III. 31 und VI. 8, weil auch DF = DG,

$$AD : DG = DG : DE,$$

folglich $AD - DG : DG - DE = DG : DE$,

oder $AG : GE = HI : BC$; (weil $DG = HI$, u. $DE = BC$)

aber $AG : GE = AH : HB$

folglich $HI : BC = AH : HB$.

Ferner ist $HI : BC = \triangle HCI : \triangle CHB$
und $AH : HB = \triangle ACH : \triangle HCB$ } El. VI. 1,

folglich $\triangle HCI : \triangle CHB = \triangle ACH : \triangle CHB$,

daher $\triangle HCI = \triangle ACH$

und $\triangle HCI + \triangle HCB = \triangle ACH + \triangle HCB$

oder Viereck $BHIC = \triangle ABC$.

§ 13.

Aufg. Ein gegebenes Viereck mit zwey parallelen Seiten in ein anderes Viereck mit zwey parallelen Seiten zu verwandeln, welches eine dieser Seiten und einen daran liegenden Winkel mit jenem gemeinschaftlich habe, und worin der andere an dieser Seite liegende Winkel einem gegebenen gleich sey.

Aufl. Das Viereck ABCD (Fig. 19), worin die beyden Seiten AD, BC parallel sind, soll in ein anderes verwandelt

werden, welches mit ihm den Winkel A und die Linie AD gemeinschaftlich habe, der andere Winkel bey D aber dem gegebenen m gleich sey.

Man verwandle nach § 1 das Viereck ABCD in das Dreyeck DAE, und dieses wieder nach § 12 in das Viereck AFGD, so daß ∠ ADG = m, so ist AFGD das verlangte Viereck.

II. Theilung der Figuren durch Zeichnung.

---

§ 14.

Hülfssatz.

Aufg. Eine gerade Linie nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Es sey die Linie Ad (Fig. 20) gegeben; man soll diese Linie so theilen, daß die Theile, in der Ordnung wie sie neben einander liegen, sich wie die Linien m, n, p verhalten.

1) Man setze an Ad unter einen beliebigen Winkel die Linie AE an, und trage darauf von A nach E die Linien m, n, p, so daß AB = m, BC = n, CD = p.

2) Aus dem letzten Punkte D ziehe die Linie Dd, und aus B und C die Linien Bb, Cc der Dd parallel, so sind b und c die Theilungspunkte der Linie Ad; es wird nämlich seyn Ab : bc : cd = m : n : p.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

Zus. Soll daher eine gerade Linie in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so darf man nur auf AE

eben so viele gleiche Theile von willkührlicher Größe auftragen, und hierauf nach 2) verfahren.

§ 15.

Aufg. Ein Dreyeck aus einer bestimmten Spitze in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 21) das gegebene Dreyeck, welches z. B. in sechs gleiche Theile getheilt werden soll; A sey die Spitze, von welcher die Theilungslinien gezogen werden sollen.

1) Man theile die der Spitze A gegenüber liegende Seite BC in sechs gleiche Theile BD, DE, EF, FG, GH, HC.

2) Ziehe aus A nach den Theilungspunkten D, E, F, G, H, die Linien AD, AE, AF, AG, AH, so wird das Dreyeck ABC in die sechs gleichen Dreyecke ABD, ADE, AEF, AFG, AGH, AHC, getheilt seyn.

Zus. Sollte das Dreyeck ABC nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so dürfte man nur die Linie BC nach diesem Verhältnisse theilen (§ 14), und aus A nach den Theilungspunkten Linien ziehen.

§ 16.

Aufg. Ein Dreyeck aus einem gegebenen Punkte auf einer Seite desselben in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 22) das gegebene Dreyeck, welches z. B. in 8 Theile getheilt werden soll; die Theilungslinien sollen von T ausgehen.

1) Man nehme Aa = Bb = $\frac{1}{8}$ AB, und ziehe aus T nach der Spitze des Dreyecks die Linie TC.

2) Aus a und b ziehe man die Linien aD, bK der TC parallel, welche die Seiten AC, BC, in D und K treffen.

3) Trage auf AC von A nach C die Linie AD so oft auf,

als es sich thun läßt, hier viermahl, und bestimme dadurch die Punkte E, F, G; trage auch auf BC die Linie BK so oft auf, als es sich thun läßt, hier dreymahl, und bestimme dadurch die Punkte I, H.

4) Ziehe hierauf aus T die Linien TD, TE, TF, TG, TH, TI, TK, so werden ATD, DTE, ETF, FTG, GTHC, HTI, ITK, KTB, die acht gleichen Theile des Dreyecks ABC seyn.

Bew. Man ziehe CA, so ist

$$\triangle ACB : \triangle ACa = AB : Aa = 8 : 1$$

und daher $\triangle ACa = \frac{1}{8} \triangle ACB$;

aber $\triangle ACa = \triangle ATD$

weil $\triangle AaD$ beyder Dreyecke gemeinschaftlich ist, und $\triangle aTD = \triangle aCD$,

folglich auch $\triangle ATD = \triangle DTE = \triangle ETF = \triangle FTG = \frac{1}{8} \triangle ABC$.

Eben so wird, wenn man die Linie bC ziehet, bewiesen, daß

$$\triangle BTK = \triangle KTI = \triangle ITH = \frac{1}{8} \triangle ABC.$$

Da also die Dreyecke zusammen schon $\frac{7}{8}$ des Dreyecks ABC ausmachen, so muß das Viereck CGTH ebenfalls der achte Theil des Dreyecks ABC seyn.

Erst. Zus. Will man, nachdem man die Linie AD so oft aufgetragen hat, als es sich thun läßt, und damit bis G gekommen ist, den Punkt H auf der Linie BC unmittelbar bestimmen, so läßt sich dieses auf folgende sehr einfache Art bewerkstelligen. Man verlängere AC, und trage die AD noch einmahl mehr von G in c auf; ziehe hierauf aus c die cH der CT parallel, so ist der Punkt H bestimmt. Denn da $\triangle THC = \triangle TcC$ (weil cH $\#$ CT), so ist wenn das Dreyeck TCG hinzukommt, Viereck GTHC $= \triangle GTc$; aber $\triangle GTc = \triangle ATD = \frac{1}{8} \triangle ABC$, folglich auch Viereck GTHC $= \frac{1}{8} \triangle ABC$.

Zweyt.

sich auch die Linien AZ, BZ, CZ, DZ, bestimmen. Es sey daher AZ = a, BZ = b, DZ = c, CZ = d. Da auch der Punkt T gegeben ist, so sey ZT = f. Um nun den Punkt E zu bestimmen, setze man ZE = x.

2) Nach § 26 Zus. 1 ist,

$$\triangle BZA : \triangle CZD = ab : cd$$

also $\triangle BZA - \triangle CZD : \triangle CZD = ab - cd : cd$

oder $\text{Trap. } ABCD : \triangle CZD = ab - cd : cd$

3) Eben so ist,

$$\triangle EZT : \triangle CZD = fx : cd$$

also $\triangle EZT - \triangle CZD : \triangle CZD = fx - cd : cd$

oder $\text{Trap. } DCET : \triangle CZD = fx - cd : cd$

4) Aus 2) und 3) erhält man,

$$\text{Trap. } ABCD : \text{Trap. } DCET = ab - cd : fx - cd.$$

Aber $\text{Trap. } ABCD : \text{Trap. } DCET = m : n$

folglich $ab - cd : fx - cd = m : n$

und $x = \frac{n(ab - cd)}{mf} + \frac{cd}{f}$.

Beysp. Es sey a = 200′, b = 178′, c = 112,′ d = 120′, f = 140′, und man soll $\frac{3}{8}$ des Trapez abschneiden. Man nehme ZE = $155\frac{5}{14}$, und ziehe TE, so ist DCET der verlangte Theil.

§ 45.

Aufg. Ein Viereck, welches durch eine gerade Linie in zwey andere Vierecke abgetheilt ist, ferner durch eine zweyte gerade Linie so zu theilen, daß von jedem der beyden Vierecke, in welchen das ganze zerlegt ist, Stücke von gegebenem Flächeninhalte abgeschnitten werden.

Aufl. Das Viereck ABCD (Fig. 53), welches durch die Linie EF in die Vierecke EBCF, EADF, getheilt ist, soll durch eine Linie IL ferner so getheilt werden, daß die Vierecke BEKI, EALK, einen gegebenen Flächeninhalt haben.

1) Man verlängere die Seiten BC, AD, bis sie der ver-

längerten EF in G und H begegnen. Da das Trapez ABCD, und darin die Linie EF gegeben ist, so kann man den Flächeninhalt der Dreyecke BEG, AEH, desgleichen die Winkel BGE, AHE, nebst der Linie GH für bekannt annehmen. Da nun auch die Trapeze BEKI, EALK der Größe nach gegeben sind, so ist auch der Flächeninhalt der Dreyecke GKI, LKH, bekannt. Man setze daher $\triangle GKI = p$, $\triangle LKH = q$, $\angle IGK = \alpha$, $\angle KHL = \beta$, und $GH = a$.

2) Wäre die Linie GK, und der Winkel GKI bekannt, so könnte man die Theilungslinie IL ziehen. Man setze daher $GK = x$, $\angle GKI = \varphi$.

3) Nach § 27 ist,

$$\triangle GKI = \frac{x^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \varphi)},$$

$$\triangle LKH = \frac{(a-x)^2 \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \varphi}{2 \text{ Sin. } (\beta + \varphi)}.$$

Da nun $\triangle GKI = p$, $\triangle LKH = q$, so hat man die beyden Gleichungen,

$$x^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi = 2\, p \text{ Sin. } (\alpha + \varphi)$$

$$(a-x)^2 \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \varphi = 2\, q \text{ Sin. } (\beta + \varphi)$$

4) Man entwickele Sin. $(\alpha + \varphi)$, Sin. $(\beta + \varphi)$ (F. 9), dividire die erste Gleichung durch Sin. α Sin. φ, und die zweyte durch Sin. β Sin. φ, und setze Cot. α, Cot. β, Cot. φ, für $\frac{\text{Cos. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha}$, $\frac{\text{Cos. } \beta}{\text{Sin. } \beta}$, $\frac{\text{Cos. } \varphi}{\text{Sin. } \varphi}$ (F. 2). Hierdurch verwandeln sich die vorigen Gleichungen in folgende:

$$x^2 = 2\, p \,(\text{Cot. } \varphi + \text{Cot. } \alpha)$$

$$(a-x)^2 = 2\, q \,(\text{Cot. } \varphi + \text{Cot. } \beta).$$

5) Hieraus erhält man durch die Elimination von Cot. φ die Gleichung

$$\frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = \text{Cot. } \beta - \text{Cot. } \alpha$$

oder $\frac{(a-x)^2}{2q} - \frac{x^2}{2p} = \frac{\text{Sin.}(\alpha-\beta)}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta}$ (F. 24),

oder $x^2 - \frac{2ap}{p-q}x = \frac{2pq\ \text{Sin.}(\alpha-\beta)}{(p-q)\,\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta} - \frac{a^2p}{p-q}$

6) Die Auflösung dieser Gleichung giebt,

$$x = \frac{ap}{p-q} \pm \sqrt{\left[\frac{a^2pq}{(p-q)^2} + \frac{2pq\ \text{Sin.}(\alpha-\beta)}{(p-q)\,\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta}\right]},$$

oder $x = \frac{a}{p-q}\left[p \pm \sqrt{\left(pq + \frac{2pq(p-q)\,\text{Sin.}(\alpha-\beta)}{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta}\right)}\right]$.

7) Hat man x gefunden, so ist auch φ bekannt; denn es ist,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{x^2}{2p} - \text{Cot.}\,\alpha.$$

Zus. Ist $\alpha = \beta$, so wird $\text{Sin.}(\alpha-\beta) = 0$, und man erhält

$$x = \frac{a}{p-q}[p \pm \sqrt{pq}].$$

Wird $p = q$ gesetzt, so erhält man aus der Formel in 6)

$$x = \frac{a}{p-p}[p \pm \sqrt{p^2}],$$

also entweder $x = \infty$, oder $x = \frac{0}{0}$. Der erste von diesen beyden Werthen kann hier gar nicht gebraucht werden; der zweyte ist unbestimmt. Für diesen besondern Fall hat man aber aus 4) folgende zwey Gleichungen:

$$x^2 = 2p(\text{Cot.}\,\varphi + \text{Cot.}\,\alpha)$$
$$(a-x)^2 = 2p(\text{Cot.}\,\varphi + \text{Cot.}\,\beta).$$

Wird die zweyte von der ersten abgezogen, so erhält man nur eine Gleichung vom ersten Grade, nämlich:

$$2ax - a^2 = 2p(\text{Cot.}\,\alpha - \text{Cot.}\,\beta) = \frac{2p\ \text{Sin.}(\alpha-\beta)}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin}\,\beta}$$

und daher $x = \frac{p\ \text{Sin.}(\alpha-\beta)}{a\ \text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\beta} + \frac{1}{2}a.$

Ist hier noch überdies $\beta = \alpha$, so erhält man man $x = \frac{1}{2}a$, wie auch sehr leicht aus der Figur zu schließen ist, weil wegen der gleichen Winkel und des gleichen Flächeninhalts der Dreyecke GKI, LKH, nothwendig GK = GH seyn muß.

Beysp. Ein viereckigt Stück Feld ABCD, welches in EBCF aus Wiesen, und in EADF aus Acker bestehet, soll durch eine Linie IL so getheilt werden, daß das Stück BEKI, welches von den Wiesen abgeschnitten wird, einen Flächeninhalt von 2600 □°, und das Stück EALK, welches von dem Acker abgeschnitten wird, einen Flächeninhalt von 2900 □° habe.

Es sey CGF $= \alpha = 40^\circ\ 40'$, AHE $= \beta = 18^\circ\ 26'$, GH $= a = 228^\circ$, △BEG = 480 □°, △AEH = 6488 □°; also △GKI $= p = 3080$ □°, △LKH $= q = 3588$ □°. Die Berechnung geschiehet auf folgende Art:

Man setze der Kürze wegen den Ausdruck

$$\frac{2pq(q-p)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta} = u:$$

so wird

$$x = \frac{a}{q-p}\left[\pm\sqrt{(pq-u)}-p\right].$$

Die Rechnung mit Logarithmen giebt

$$\log. u = [\log. 2p + \log. q + \log. (q-p) + \log. \text{Sin.}\,(\alpha-\beta)] - [2\log. a + \log. \text{Sin.}\,\alpha + \log. \text{Sin.}\,\beta]$$

$$= [\log. 6160 + \log. 3588 + \log. 508 + \log. \text{Sin.}\,22^\circ\ 14'] - [2\log. 228 + \log. \text{Sin.}\,40^\circ\ 40' + \log. \text{Sin.}\,18^\circ\ 26']$$

$$= 9{,}6282243 - 4{,}0298522 = 5{,}5983721,$$

also

$$u = 396617{,}63;\ \sqrt{(pq-u)} = 3264{,}11$$

und $x = \frac{228}{508}[3264{,}11 - 3080] = 82{,}63.$

(Von den beyden für x gefundenen Werthen kann hier nur der erste gebraucht werden, weil der zweyte negativ ist.)

Hieraus erhält man nun ferner

$$\text{Cot.}\ \varphi = \frac{x^2}{2p} - \text{Cot.}\ \alpha = 1{,}10839 - 1{,}16397 = -0{,}05558,$$

und daher $\varphi = 93^\circ\ 10'$.

Macht man daher GK = 82°,63, und ziehet durch K die Linie IL, unter einem Winkel GKI = 93° 10', so ist die verlangte Theilung geschehen.

Anmerk. Die hier aufgelöste Aufgabe ist für den praktischen Feldmesser von großer Wichtigkeit. Eine ähnliche Aufgabe befindet sich in Lamberts gelehrtem deutschen Briefwechsel, herausgegeben von J. Bernoully, 2ter Band (1782) S. 412; desgleichen in v. Tempelhofs Zusätzen zu Clairaut's Anfangsgründe der Algebra, (zweyte Aufl. 1797) S. 225.

V. Geometrische Bestimmung der Entfernungen und Höhen der Gegenstände. *)

§ 46.

Aufg. Die Entfernung zweyer Gegenstände von einander zu bestimmen, wenn irgend ein zwischen denselben befindliches Hinderniß, ein See, Morast, oder Berg, die unmittelbare Messung nicht gestattet, vorausgesezt, daß es einen Standpunkt gebe, von wo aus man nach diesen Gegenständen in gerader Linie messen kann.

Erste Auflösung.

1) A und B (Fig. 54) mögen die beyden Objekte seyn,

---

*) Die unter dieser Rubrik vorkommenden Aufgaben, müssen hier eigentlich, wie auch schon aus der gewählten Art des Vortrags erhellet, nur als geometrische Uebungen angesehen werden, und sind daher nicht bloß für den praktischen Feldmesser bestimmt.

deren Entfernung von einander gefunden werden soll. Man wähle einen Standpunkt C, von wo aus man nach A und B in gerader Linie messen kann; messe die Weiten CA, CB, und trage solche rückwärts auf ihre Verlängerungen nach D und E, d. h. man mache CD = CA, CE = CB. Mißt man hierauf die Weite DE, so wird AB = DE seyn. Oder, man mache CD′ = CA, CE′ = CB, so wird auch AB = DE′ seyn.

2) Sind die Weiten CA, CB, sehr groß, und gestattet es etwa der Raum nicht, solche ungehindert rückwärts zu tragen: so nehme man nur von beyden Weiten irgend einen gleichen Theil, die Hälfte, den dritten, vierten, oder im Allgemeinen den nten Theil, trage diese Theile rückwärts, von C nach a, b, oder vorwärts von C, nach α, β; so wird ab, oder $\alpha\beta$, der eben so vielte Theil der unbekannten Weite AB seyn, als Ca, oder Cα von CA, und Cb, oder Cβ von CB.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

Zweyte Auflösung.

A und B (Fig. 55) sollen wieder die beyden Objekte, und C der gewählte Standpunkt seyn. Man nehme nach der Richtung CB, die Weite CD = CA, und messe, wenn es sich thun läßt, AD. Es sey AC = CD = a, BC = b, AD = c, BD = b — a = d: so ist in dem Dreyecke ACB,

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos. } C,$$

und in dem Dreyecke ACD,

$$c^2 = 2a^2 - 2a^2 \text{ Cos. } C,$$

weil AC = CD = a. Ziehet man den Werth von Cos. C aus der zweyten Gleichung und setzt solchen in die erste, so erhält man,

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab + \frac{bc^2}{a}$$
$$= (a-b)^2 + \frac{bc^2}{a}$$
$$= d^2 + \frac{bc^2}{a},$$

und daher $AB = \sqrt{\left(d^2 + \frac{bc^2}{a}\right)}$.

Beysp. Für $a = 50'$, $b = 76'$, $c = 32'$, ist AB $= 47',249$.

Dritte Auflösung.

Giebt es in den Richtungen CA, CB, (Fig. 56), zwey Punkte D, E, deren Entfernung DE man messen kann, so läßt sich, wenn man noch überdies die Weiten CA, CB, CD, CE mißt, die Entfernung der Objekte A, B von einander ebenfalls bestimmen. Es sey CA $= a$, CB $= b$, CD $= c$, CE $= d$, DE $= e$; so ist in dem Dreyecke ACB,

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,\text{Cos.}\, C,$$

und im Dreyecke DCE,

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \,\text{Cos.}\, C,$$

und wenn man den Werth von Cos. C aus der zweyten Gleichung in die erste setzt,

$$AB = \sqrt{\left[a^2 + b^2 - \frac{ab}{cd}(c^2 + d^2 - e^2)\right]}$$

Beysp. Für $a = 30°$, $b = 35°$, $c = 20°$, $d = 15°$, $e = 13°$, ist AB $= 23°$.

Vierte Auflösung.

Ist man mit Instrnmenten zum Winkelmessen versehen, so darf man nur (Fig. 56) den Winkel ACB, und die Weiten CA, CB, messen. Es sey CB $= a$, CA $= b$, $\angle ACB = \alpha$: so ist,

$$AB = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \,\text{Cos.}\, \alpha)}.$$

Man kann aber auch zuerst die Winkel CAB, CBA, bestimmen. Denn da CAB + CBA = 180° — α, so darf man nur vermittelst der Proportion,

$$a + b : a - b = \text{Tang.}\ \frac{CAB + CBA}{2} : \text{Tang.}\ \frac{CAB - CBA}{2}$$

$$= \text{Tang.}\ \frac{180^\circ - \alpha}{2} : \text{Tang.}\ \frac{CAB - CBA}{2}$$

die Differenz der beyden Winkel CAB, CBA, suchen. Sind die Winkel CAB, CBA, bestimmt, so hat man,

$$AB = \frac{b\ \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Sin. CAB}} = \frac{a\ \text{Sin.}\ \alpha}{\text{Sin. CBA}}.$$

Zus. Ist AC = BC, so findet man,

$$AB = \sqrt{(2a^2 - 2a^2\ \text{Cos.}\ \alpha)} = a\sqrt{2(1 - \text{Cos.}\ \alpha)} = 2a\ \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\alpha$$

(§. 7).

Ist ACB ein rechter Winkel, so wird Cos. $\alpha = 0$, und daher

$$AB = \sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

Ist ACB = 45°, so wird, weil Cos. 45° = $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$$AB = \sqrt{(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})}.$$

Erstes Beysp. Für a = 168′, b = 102′, α = 49° 25′, ist AB = 127′,797.

Zweyt. Beysp. Für a = 189′, b = 114¾′, α = 107° 48′, ist AB = 249′,295.

Dritt. Beysp. Für a = b = 250′, α = 43° 50′, ist AB = 186′,629.

§ 47.

Aufg. Die Entfernung zweyer Gegenstände von einander zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Erste Auflösung.

Gesetzt A (Fig. 57) wäre ein unzugänglicher Gegenstand, und B ein anderer, dessen Entfernung von A man bestimmen soll.

1) Man nehme in der Verlängerung von AB irgend einen Punkt D an, und suche einen Standpunkt C, von welchem man sowohl nach B als nach D kommen kann; messe die Weiten CB, CD, und trage solche rückwärts auf ihre Verlängerungen, d. h. man mache Cd = CD, und Cb = CB; gehe hierauf in der Richtung db so lange fort, bis man zu einem Punkte a kommt, welcher mit A und C in gerader Richtung liegt. Mißt man nun die Weite ba, so hat man auch die Weite AB, weil AB = ab ist.

2) Ist nicht Raum genug vorhanden, um die Weiten CB, CD ihrer ganzen Länge nach rückwärts zu tragen, so darf man nur gleiche Theile derselben, $C\delta = \frac{1}{n} CD$, $C\beta = \frac{1}{n} CB$ auftragen, alsdann nach der Richtung $\delta\beta$ so lange fortgehen, bis man zu einem Punkte α kommt, welcher mit A, C, in gerader Richtung liegt. Mißt man hierauf $\beta\alpha$, so findet man AB aus der Proportion

$$AB : \beta\alpha = CB : C\beta = CD : C\delta.$$

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

Zweyte Auflösung.

Kann man von C nach A und B (Fig. 57), desgleichen von B nach A und C visiren, und daselbst die Winkel ACB, ABC, und überdies noch die Weite BC messen, so ist,

$$AB = \frac{BC \text{ Sin. } ACB}{\text{Sin. } (ACB + ABC)}.$$

Beysp. Für BC = 738′, ACB = 24° 16′ 13″, ABC = 31° 5′, ist AB = 368′,734.

Dritte Auflösung.

AB (Fig. 58) sey die zu messende Weite, von welcher nur der Punkt B zugänglich ist; C ein Punkt außerhalb derselben, und D ein Punkt in ihrer Verlängerung.

1) Man nehme auf CD irgend einen Punkt E, und gehe nach der Richtung EA so lange fort, bis man zu einem Punkte F kommt, welcher mit B, C, in gerader Linie liegt; messe hierauf die Weiten BD, BF, FC, CE, ED, so läßt sich daraus die Entfernung AB bestimmen. Es sey BD = a, BF = b, CF = c, DE = d, EC = e.

2) Man ziehe EG der BD parallel: so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke CGE, CBD,

$$CD : CE = BD : GE$$

oder $$d + e : e = a : GE$$

und $$CD : CE = BC : CG$$

oder $$d + e : e = b + c : CG,$$

folglich $$GE = \frac{ae}{d+e},\ CG = \frac{(b+c)e}{d+e}$$

$$FG = CF - CG = \frac{cd - be}{d+e}.$$

3) Die Dreyecke EFG, AFB, sind ebenfalls ähnlich; man hat daher,

$$FG : GE = BF : AB,$$

oder $$\frac{cd - be}{d+e} : \frac{ae}{d+e} = b : AB,$$

folglich $$AB = \frac{abe}{cd - be}.$$

Beysp. Für a = 250′, b = 76′, c = 132′, d = 140′, e = 80′, ist AB = $122\frac{18}{31}$′.

Vierte Auflösung.

AB (Fig. 59) sey wieder eine nur in B zugängliche Weite, die aber auf keiner Seite verlängert werden kann.

1) Man wähle zwey Standpunkte C, D, welche mit B in Einer geraden Linie liegen, und von wo aus sowohl A als B gesehen werden kann; messe die Weiten CD, CB, und die

Winkel ACB, ADB. Es sey $BC = a$, $CD = b$, $ADB = \alpha$, $ACB = \beta$.

2) Im Dreyecke ACD ist,

$$\text{Sin. } CAD : \text{Sin. } ADC = CD : AC,$$

oder $$\text{Sin. } (\alpha - \beta) : \text{Sin. } \alpha = b : AC,$$

daher $$AC = \frac{b \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}.$$

3) Im Dreyecke ACB ist aber,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 BC . AC . \text{Cos. } \beta$$

oder $$AB^2 = a^2 + \left(\frac{b \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}\right)^2 - \frac{2 ab \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)},$$

folglich ist $$AB = \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{b \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}\right)^2 - \frac{2ab \text{Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}\right]}$$

Beysp. Es sey $a = 500'$, $b = 67'$, $\alpha = 38^\circ\ 7'$, $\beta = 21^\circ\ 43'$. Hier ist

$$a^2 = 250000$$

$$\left(\frac{b \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)}\right)^2 = 21455{,}72$$

$$\frac{2 ab \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha - \beta)} = 186081{,}46$$

folglich $AB = \sqrt{135374{,}26} = 367',932$.

§ 48.

Aufg. Die Entfernung zweyer Gegenstände von einander zu finden, wenn man zu keinem von beyden kommen kann.

Erste Auflösung.

AB (Fig. 60) sey die zu messende Weite.

1) Man wähle einen Standpunkt C, verlängere die Richtungen AC, BC willkührlich nach D und E, und halbire DE in F. Visire aus F nach A und B, und bestimme die Punkte G, H, worin die Gesichtslinien FA, FB, die Linien CD, CE

schneiden. Messe hierauf die drey Seiten des Dreyecks DCE, und die Weiten CG, CH. Es sey CD = a, CE = b, DE = c, CG = d, CH = e.

2) Man ziehe Ff der CE parallel; so ist, weil DE in F halbirt ist, $Cf = \frac{1}{2}a$, $Gf = \frac{1}{2}a - d$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke AGC, FGf,

$$Gf : Ff = CG : AC$$

oder $\frac{1}{2}a - d : \frac{1}{2}b = d : AC$

folglich $$AC = \frac{bd}{a - 2d}.$$

3) Eben so findet man, wenn Fg der CD parallel gezogen wird,

$$BC = \frac{ae}{b - 2e}.$$

4) Nachdem die Linien AC, BC, gefunden worden, so darf man nur nach der ersten Aufl. § 46, diese Linien selbst, oder proportionirte Stücke derselben rückwärts auf ihre Verlängerungen tragen, so wird sich daraus die Weite AB ergeben.

Zus. Will man AB durch Rechnung bestimmen, so kann es auf folgende Art geschehen.

Da die drey Seiten des Dreyecks DEC gegeben sind: so hat man,

$$\text{Cos. } DCE = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

In dem Dreyecke ACB hat man aber,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, AC \,.\, BC \,.\, \text{Cos. } ACB.$$

Setzt man daher für AC, BC, und Cos. ACB = Cos. DCE ihre gefundenen Werthe, so erhält man,

$$AB = \sqrt{\left[\frac{b^2 d^2}{(a - 2d)^2} - \frac{a^2 e^2}{(b - 2e)^2} - \frac{de(a^2 + b^2 - c^2)}{(a - 2d)(b - 2e)}\right]};$$

welchem Ausdrucke man auch folgende zur Rechnung mit Logarithmen geschicktere Form geben kann,

$$AB = \sqrt{\left[\left(\frac{bd}{a-2d} - \frac{ae}{b-2e}\right)^2 - \frac{de(a-b+c)(a-b-c)}{(a-2d)(b-2e)}\right]}.$$

Beysp. Für a = 156′, b = 98′, c = 187′, d = 63′, e = 34′, ist AB = 275′,791.

Zweyte Auflösung.

AB (Fig. 61) sey die unzugängliche Weite.

1) Man wähle einen beliebigen Standpunkt C, visire nach A und B, und bestimme dadurch den Winkel ACB; mache ACD = ACB, und gehe nach der Richtung CD so lange fort, bis man einen Punkt D findet, wo der Winkel BDC = 90° — BCA, und messe die Weite CD und den Winkel ADC. Es sey BCA = ACD = α, ADC = β, CD = a.

2) Da ACD = α, und BDC = 90° — α, so ist CED ein rechter Winkel, folglich △ CED = △ BEC, und daher BC = CD. Also auch △ ACD = △ ACB, und daher AD = AB.

3) In dem Dreyeck ACD ist aber,

$$\text{Sin. DAC} : \text{Sin. DCA} = \text{CD} : \text{AD}$$

oder $$\text{Sin.}(\alpha+\beta) : \text{Sin.}\,\alpha = a : \text{AD}\ (= \text{AB}),$$

folglich ist $$\text{AB} = \frac{a\ \text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}.$$

Beysp. Für α = 31° 5′, β = 113° 17′, a = 567′, ist AB = 502′,463.

Dritte Auflösung.

AB (Fig. 62) sey die unzugängliche Weite.

1) Man wähle einen beliebigen Standpunkt C, mache ACD = 90°, gehe in der Richtung CD so lange fort, bis man zu einem Punkte D kommt, wo BDC ebenfalls = 90° ist, und suche auf der Linie CD zwey Punkte E, F, von solcher Lage, daß AFC = BED = 45° sey.

2) Hat man diese Punkte bestimmt, so messe man die Weiten CD, CF, DE. Es sey CD = a, CF = b, DE = c. Man ziehe Aa der CD parallel.

3) Alsdann ist aD = AC = CF = b, und BD = DE = c; folglich Ba = c — b.

4) In dem rechtwinklichten Dreyecke ABa ist aber $AB^2 = Aa^2 + Ba^2 = CD^2 + Ba^2$; daher ist,

$$AB = \sqrt{[a^2 + (c-b)^2]}.$$

Vierte Auflösung.

AB (Fig. 63) sey die zu messende Weite.

1) Man wähle irgend einen Standpunkt C, wo ACB ein stumpfer Winkel ist, messe diesen Winkel, indem man nach A und B visirt, so ist auch sein Nebenwinkel ACD bekannt. Man bestimme nun auf den verlängerten Gesichtslinien AC, BC, zwey Punkte D, E, von solcher Lage, daß ADB = AEB = 90° sey, und messe die Weite DE, so läßt sich daraus AB bestimmen. Es sey DE = a, ACD = α.

2) Da ADB, AEB, vermöge der Construktion rechte Winkel sind; so liegen die Punkte D, E, in einem Kreise, dessen Durchmesser AB ist. Denkt man sich diesen Kreis wirklich beschrieben, so ist DAE ein Peripherie-Winkel, und DE die Chorde des Bogens, auf welchem derselbe stehet; folglich ist aus bekannten trigonometrischen Gründen,

$$DE = a = AB \text{ Sin. } DAE.$$

Aber Sin. DAE = Cos. α, (weil ADC ein rechter Winkel ist,) daher ist a = AB Cos. α, und

$$AB = \frac{a}{\text{Cos. } \alpha}.$$

Beysp. Für a = 563',7, α = 42° 19' 7'', ist AB = 762',362.

Fünfte Auflösung.

AB (Fig. 64) sey die zu messende Weite.

1) Man bestimme drey Standpunkte C, D, E, so, daß die drey Winkel ACB, ADB, AEB, welche die Gesichtslinien beym Visiren nach A und B einschließen, einander gleich sind; jeder dieser Winkel sey $= \alpha$. Man messe hierauf die drey Seiten des Dreyecks CDE, so läßt sich daraus die Weite AB bestimmen. Es sey $CD = a$, $DE = b$, $CE = c$.

2) Man beschreibe über AB einen Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel α in sich faßt, und vollende den Kreis: so wird dieser Kreis durch die drey Punkte C, D, E, gehen. Ziehe den Durchmesser DP, die Linie PC, und das Perpendikel DQ.

3) Die Dreyecke DCP, DQE, sind einander ähnlich; denn es ist $DQE = DCP = R$, und $DEC = DPC$: also,

$$DQ : DE = CD : DP,$$

oder, weil DQ, als die Höhe des Dreyecks CDE, $= \frac{2\triangle CDE}{c}$,

$$\frac{2\triangle CDE}{c} : b = a : DP,$$

und daher

$$DP = \frac{abc}{2\triangle CDE}.$$

4) Setzt man in diesen Ausdruck für $\triangle CDE$ seinen Werth aus § 29, so erhält man

$$DP = \frac{2\,abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}.$$

5) Nachdem der Durchmesser des Kreises gefunden worden, ist es leicht die Sehne AB zu bestimmen. Denn da $AB = DP \operatorname{Sin.} \alpha$, so ist, wenn für DP sein Werth gesetzt wird,

$$AB = \frac{2\,abc \operatorname{Sin.} \alpha}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}},$$

welcher Ausdruck zur Rechnung mit Logarithmen sehr bequem ist.

Beysp. Für a = 197′, b = 113′, c = 235′, α = 56° 29′, ist AB = 196′,536.

Zus. Aus 4) erhellet zugleich, daß, wenn a, b, c, die drey Seiten eines Dreyecks sind, der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises =

$$\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}.$$

Sechste Auflösung.

AB (Fig. 65) sey die zu messende Weite.

1) Man wähle einen beliebigen Standpunkt C, mache den rechten Winkel ACD, und gehe nach der Richtung CD so lange fort, bis man zu einem Punkte D kommt, wo auch BDC ein rechter Winkel ist; visire aus C nach B und D, desgleichen aus D nach A und C, und bestimme dadurch die Winkel BCD, ADC; messe auch die Linie CD. Es sey BCD = α, ADC = β, CD = a.

2) Aus den rechtwinklichten Dreyecken ACD, BDC, erhält man,

$$BD = a \text{ Tang. } \alpha, \quad AC = a \text{ Tang. } \beta.$$

Ziehet man nun Aa der CD parallel: so ist,

$$Aa = a, \quad Ba = a(\text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta).$$

3) In dem rechtwinklichten Dreyecke AaB ist daher

$$AB^2 = a^2 + a^2(\text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta)^2$$

und folglich $AB = a\sqrt{[1 + (\text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta)^2]}$.

4) Zur leichteren Berechnung dieses für AB gefundenen Ausdruckes, setze man Tang. α — Tang. β = Tang. φ, d. h. man suche einen Winkel φ von solcher Beschaffenheit, daß die Tangente desselben dem Unterschiede der Tangenten der beyden Winkel α, β, gleich sey. Hat man einen solchen Winkel gefunden, so ist,

$$AB = a\sqrt{(1 + \text{Tang. } \varphi^2)} = a \text{ Sec. } \varphi \quad (\text{§. } 29).$$

Beysp.

Beysp. Es sey $a = 1375'$, $\alpha = 65^\circ\ 17'$, $\beta = 39^\circ\ 48'$. Hier ist

$$\text{Tang. } \varphi = \text{Tang. } \alpha - \text{Tang. } \beta = 2{,}1724911 - 0{,}8331686$$
$$= 1{,}3393225$$

folglich $\varphi = 53^\circ\ 15'\ 11''$.

Hieraus erhält man,

$$\text{log. Sec. } \varphi = \text{log. Sec. } 53^\circ\ 15'\ 11'' = 0{,}2230941$$
$$\text{log. a Sec. } \varphi = 3{,}3613968$$

daher $AB = 2298',247$.

Siebente Auflösung.

AB (Fig. 65) sey wieder die zu messende Weite.

1) Man nehme zwey willkührliche Standpunkte C, D; messe die Winkel ACD, BCD, BDC, ADC, desgleichen die Standlinie CD. Es sey $CD = a$, $ACD = \alpha$, $BCD = \beta$, $BDC = \gamma$, $ADC = \delta$; so hat man im Dreyeck ACD, $\angle CAD = 180^\circ - \alpha - \delta$, und im Dreyeck BCD, $\angle CBD = 180^\circ - \gamma - \beta$. Da also diese letzteren Winkel ebenfalls bekannt sind; so setze man der Kürze wegen, $CAD = A$, $CBD = B$.

2) Man hat also im Dreyecke CAD,

$$\text{Sin. } A : \text{Sin. } \delta = a : AC,$$

und im Dreyecke CBD,

$$\text{Sin. } B : \text{Sin. } \gamma = a : BC,$$

folglich $AC = \dfrac{a \text{ Sin. } \delta}{\text{Sin. } A}$, $BC = \dfrac{a \text{ Sin. } \gamma}{\text{Sin. } B}$.

3) Da nun im Dreyecke ACB, außer den beyden Seiten AC, BC, auch noch der von ihnen eingeschlossene Winkel $ACB = \alpha - \beta$ bekannt ist: so erhält man,

$$AB = a\sqrt{\left[\left(\frac{\text{Sin.}\,\delta}{\text{Sin.}\,A}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,B}\right)^2 - \frac{2\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}(\alpha - \beta)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}\right]}.$$

In diesem Ausdrucke muß man zwar jeden Theil der unter

dem Wurzelzeichen befindlichen Größe besonders berechnen; indessen wird doch die Rechnung dadurch um ein Beträchtliches abgekürzt, daß man die Logarithmen von $\frac{\text{Sin. } \delta}{\text{Sin. A}}$, und $\frac{\text{Sin. } \gamma}{\text{Sin. B}}$, welche bey den beyden ersten Theilen berechnet werden müssen, beym dritten Theile benutzen kann.

Beysp. Es sey $\alpha = 110°$, $\beta = 37° \; 40'$, $\gamma = 117° \; 30'$, $\delta = 38° \; 20'$, $a = 750'$. Hier ist $A = 31° \; 40'$, $B = 24° \; 50'$,

$$\left(\frac{\text{Sin. } \delta}{\text{Sin. A}}\right)^2 = 1{,}395832$$

$$\left(\frac{\text{Sin. } \gamma}{\text{Sin. B}}\right)^2 = 4{,}460672$$

$$\frac{2 \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } (\alpha - \beta)}{\text{Sin. A Sin. B}} = 1{,}514520;$$

folglich $AB = 750 \sqrt{4{,}341984} = 1562'{,}80$.

§ 49.

Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes, z. B. eines Thurmes, zu finden, wenn der Fuß desselben mit einem gewählten, oder auch gegebenen Standpunkte in einer und derselben Horizontalebene liegt, vorausgesetzt, daß man von diesem Standpunkte aus nach dem Gegenstande hin messen kann.

Erste Auflösung.

AB (Fig. 66) sey die zu messende Höhe des Gegenstandes, oder bestimmter, die Vertikallinie, welche von dem höchsten Punkte des Gegenstandes bis zu der durch den niedrigsten Punkt desselben gelegten Horizontalebene gezogen ist; C der gewählte, oder gegebene Standpunkt, und daher, der Voraussetzung zufolge, BC eine Horizontallinie.

Man messe CB und den Elevationswinkel ACB. Es sey $CB = a$, $ACB = \alpha$: so ist im rechtwinklichten Dreyecke ABC

$AB = a \text{ Tang. } \alpha.$

Beysp. Für $a = 367'$, $\alpha = 32^\circ\ 17'\ 23''$, ist $AB = 231',915$.

Zweyte Auflösung.

Kann man von C aus nicht gerade bis nach B messen: so messe man nur einen Theil der Linie CB, etwa CD; desgleichen in C und D, die Elevationswinkel ACB, ADB. Es sey $CD = a$, $ACB = \alpha$, $ADB = \beta$.

Im Dreyecke ADC ist die Seite CD, und die Winkel ACD, DAC ($= \beta - \alpha$) gegeben; daher

$$AD = \frac{a \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)}.$$

Man hat also im rechtwinklichten Dreyecke ABD die Seite AD, und den Winkel ADB; folglich,

$$AB = AD \text{ Sin. } \beta = \frac{a \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)}.$$

Auch läßt sich BD, und also auch BC bestimmen; denn es ist

$$BD = AD \text{ Cos. } \beta = \frac{a \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } \beta}{\text{Sin. } (\beta - \alpha)}.$$

Beysp. Für $a = 967'$, $\alpha = 7^\circ\ 5'\ 13''$, $\beta = 16^\circ\ 43'\ 5''$, ist $AB = 205',131$, und $BD = 682',955$.

§ 50.

Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn der niedrigste Punkt desselben mit dem gewählten Standpunkte nicht in einer und derselben Horizontalebene liegt, vorausgesetzt, daß man von diesem Standpunkte nach dem Gegenstande hin messen kann.

Erste Auflösung.

AB (Fig. 67) sey die zu messende Höhe, und C der gewählte Standpunkt.

1) Man bringe das Fernrohr des Winkelmessers in die

horizontale Richtung Cc, richte es alsdann nach A und B, und bestimme dadurch den Elevationswinkel ACc, und den Depressionswinkel BCc. Mißt man nun noch die Weite CB, so läßt sich AB bestimmen.

2) Denn es sey ACc $= \alpha$, BCc $= \beta$: so ist ACB $= \alpha + \beta$, BAC $= 90^\circ - \alpha$; folglich im Dreyecke BAC, eine Seite und zwey Winkel gegeben; daher, weil Sin. $(90^\circ - \alpha) =$ Cos. α,

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}{\text{Cos. } \alpha}.$$

Zus. Liegt, wie in Fig. 68, C niedriger als B: so darf man nur den Winkel BCc $= \beta$ negativ setzen, und man erhält,

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha - \beta)}{\text{Cos. } \alpha};$$

wie sich auch unmittelbar aus der Figur sehr leicht erweisen läßt.

Beysp. Es liege C höher als B, und es sey $\alpha = 19^\circ\ 7'$ $\beta = 25^\circ\ 13'$, a $= 1352',7$: so ist AB $= 1000',509$.

Zweyte Auflösung.

1) Kann man von C aus nicht bis B messen: so messe man nur von CB ein Stück CD, bestimme in C die Elevationswinkel ACc und Depressionswinkel BCc, desgleichen in D den Elevationswinkel ADd. Der Winkel BDd braucht nicht gemessen zu werden, weil BDd $=$ BCc.

2) Es sey ACc $= \alpha$, BCc $= \beta$, ADd $= \gamma$: so ist ACB $= \alpha + \beta$, ADB $= \gamma + \beta$; daher CAD $=$ ADB $-$ ACB $= \gamma - \alpha$. Im Dreyecke CAD sind demnach alle Winkel und die Seite CD bekannt; folglich,

$$AD = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}{\text{Sin. } (\gamma - \alpha)}.$$

3) Im Dreyecke BAD sind nun die Winkel ADB,

ABD ($= 90^\circ - \beta$), und die Seite AD bekannt; folglich auch AB. Es ist nämlich,

$$AB = \frac{AD \text{ Sin. } (\gamma + \beta)}{\text{Cos. } \beta} = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha + \beta) \text{ Sin. } (\gamma + \beta)}{\text{Sin. } (\gamma - \alpha) \text{ Cos. } \beta}.$$

Zus. In Fig. 67 wurde angenommen, daß C höher als B liege. Liegt aber (Fig. 68) C niedriger als B: so darf man nur in dem für AB gefundenen Ausdruck, $-\beta$, anstatt β setzen, so erhält man, weil Cos. $-\beta =$ Cos. β,

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha - \beta) \text{ Sin. } (\gamma - \beta)}{\text{Sin. } (\gamma - \alpha) \text{ Cos. } \beta};$$

wie sich auch sehr leicht unmittelbar aus der Figur selbst erweisen läßt.

Beysp. Es sey in Fig. 68, $\alpha = 29^\circ$, $\beta = 17^\circ\ 6'$, $\gamma = 32^\circ\ 49'\ 8''$, a $= 1152'$: so ist AB $= 1010',953$.

§ 51.

Aufg. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, wenn man von dem gewählten oder gegebenen Standpunkte aus, in der Richtung nach dem Gegenstande, weder vor- noch rückwärts messen kann.

Erste Auflösung.

AB (Fig. 69) sey die zu messende Höhe, und C der gewählte Standpunkt.

1) Man messe irgend eine horizontale Standlinie CD $=$ a. Liegt nun diese Linie mit dem niedrigsten Punkte B der Höhe AB in einer und derselben Horizontalebene BCD: so messe man die Horizontalwinkel BCD, BDC, desgleichen einen der Elevationswinkel ACB, ADB, z. B. ACB. Es sey BCD $= \alpha$, BDC $= \beta$, ACB $= \gamma$.

2) Im Dreyecke CBD sind alsdann die beyden Winkel BCD, BDC, nebst der Seite CD gegeben; folglich ist,

$$CB = \frac{a \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

3) In dem bey B rechtwinklichten Dreyecke ABC ist aber,

$$AB = BC \text{ Tang. } \gamma;$$

wird daher für BC sein Werth aus 2) gesetzt, so erhält man,

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Tang. } \gamma}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

Beysp. Für $\alpha = 79^\circ\, 45'$, $\beta = 61^\circ\, 4'$, $\gamma = 14^\circ\, 19'\, 27''$, $a = 857'$, ist $AB = 303',128$.

Zweyte Auflösung.

1) Kann man keine Standlinie finden, welche mit B in einer Horizontalebene liegt: so sey CD irgend eine andere Linie von willkührlicher Lage; wobey ich mehrerer Allgemeinheit wegen annehmen will, daß weder C, noch D, mit B in einerley Horizontalebene liege.

2) Man denke sich durch B eine Horizontalebene cBd gelegt, welche die aus C, D, gezogenen Vertikallinien Cc, Dd, in c, d, schneidet. Es ist bekannt, daß sich in C, D, die Horizontalwinkel Bcd, Bdc, messen lassen, ungeachtet diese Punkte höher als c, d, liegen. Man messe die eben genannten Winkel, die Standlinie CD, wie auch den Elev.-Winkel ACn und Depress.-Winkel BCn der zu messenden Höhe, wo Cn eine Horizontallinie ist. Es sey $CD = a$, $Bcd = \alpha$, $Bdc = \beta$, $ACn = \gamma$, $BCn = \delta$.

3) Denkt man sich noch die Horizontallinie Cm gezogen, so läßt sich auch der Vertikalwinkel DCm messen: dieser Winkel sey $= \varepsilon$. Da nun Cm horizontal, und Dd vertikal ist, so ist DCm ein rechtwinklichtes Dreyeck, und daher,

$$Cm = a \text{ Cos. } \varepsilon.$$

Auch ist $cd = Cm$, weil Ccdm ein Parallelogramm ist.

4) Also sind im Dreyecke Bcd, die beyden Winkel Bcd, Bdc, und die Seite cd bekannt; daher ist

$$CB = \frac{cd'. \text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)} = \frac{a \text{ Cos. } \varepsilon \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}.$$

Auch ist cB = Cn, weil CcBn ein Parallelogramm ist.

5) Da AB vertikal, und Cn horizontal ist: so sind ACn, BCn, rechtwinklichte Dreyecke; folglich An = Cn . Tang. γ, Bn = Cn . Tang. δ; folglich

$$AB = Cn (\text{Tang. } \gamma + \text{Tang. } \delta) = \frac{Cn . \text{Sin. } (\gamma + \delta)}{\text{Cos. } \gamma \text{ Cos. } \delta}.$$

Oder, wenn man für Cn = cB seinen Werth aus 4) setzt,

$$AB = \frac{a \text{ Cos. } \varepsilon \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } (\gamma + \delta)}{\text{Sin. } (\alpha + \beta) \text{ Cos. } \gamma \text{ Cos. } \delta}.$$

Zus. Durch dieses Verfahren findet man auch zugleich die Höhen der Standpunkte C, D, über der Horzizontalebene cBd; denn es ist Cc = Bn, Dd = Dm + md = Dm + Cc; folglich,

$$Cc = \frac{a \text{ Cos. } \varepsilon \text{ Sin. } \beta \text{ Tang. } \delta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}$$

$$Dd = \frac{a \text{ Cos. } \varepsilon \text{ Sin. } \beta \text{ Tang. } \delta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)} + a \text{ Sin. } \varepsilon.$$

Die gemessenen Winkel können auch negativ seyn; wie man in diesem Falle zu verfahren habe, wird das folgende Beyspiel lehren.

Beysp. AB stelle einen Kirchthurm in einem Thale vor, dessen Höhe man vermittelst einer auf einem benachbarten Hügel gemessenen Standlinie CD bestimmen will. Ich nehme an, der Standpunkt C liege höher, als die Thurmspitze A, und D tiefer als C, und man habe gefunden: a = 357',3, $\alpha = 85^\circ\ 37'\ 14''$, $\beta = 79^\circ\ 13'\ 12''$, $\gamma = -13^\circ\ 5'\ 49''$, $\delta = 20^\circ\ 18'\ 9''$, $\varepsilon = -3^\circ\ 48'\ 10''$. Da nun, was auch φ für einen Winkel bedeuten mag, immer Cos. $-\varphi$ = Cos. φ, und Sin. $-\varphi = -$ Sin. φ ist: so erhält man,

$$AB = \frac{357,3 \text{ Cos. } 3^\circ 48' 10'' \text{ Sin. } 79^\circ 13' 12'' \text{ Sin. } 7^\circ 12' 20''}{\text{Sin. } 164^\circ 50' 26'' \text{ Cos. } 13^\circ 5' 49'' \text{ Cos. } 20^\circ 18' 9''}$$

$$= 183',892$$

$$Cc = \frac{357,3 \text{ Cos. } 3^\circ 48' 10'' \text{ Sin. } 79^\circ 13' 12'' \text{ Tang. } 20^\circ 18' 9''}{\text{Sin. } 164^\circ 50' 26}$$

$$= 495',470$$

$$Dd = Cc - 357,3 \text{ Sin. } 3^\circ 48' 10'' = 471',773.$$

§ 52.

Aufg. Man befindet sich auf einem Thurme, dessen Höhe über der Horizontalebene, worauf er stehet, bekannt ist: man soll von da aus, ohne von der Stelle zu gehen, die Entfernung zweyer Gegenstände von einander bestimmen, welche in eben dieser Horizontalebene liegen.

Auflös. AB (Fig. 69) stelle den Thurm vor, dessen Höhe $= h$ ist; man befindet sich in A, und will von da aus die Weite CD messen, welche mit B in einer und derselben Horizontalebene CBD liegt.

Man messe die Winkel CAB $= \alpha$, DAB $= \beta$, CAD $= \gamma$: so läßt sich CD finden. Denn da ABC, ABD, zwey rechtwinklichte Dreyecke sind, und die Linie AB, nebst d[illegible] Winkeln CAB, DAB, bekannt sind, so läßt sich AC und AD bestimmen: es ist nämlich

$$AC = h \text{ sec. } \alpha, \; AD = h \text{ sec. } \beta.$$

Da nun im Dreyecke ACD, die Seiten AC, AD und der Winkel CAD bekannt sind; so läßt sich CD finden: es ist nämlich,

$$CD = h \sqrt{(\text{sec. } \alpha^2 + \text{sec. } \beta^2 - 2 \text{ sec. } \alpha \text{ sec. } \beta \text{ Cos. } \gamma)}.$$

Beysp. Für $\alpha = 56^\circ 34'$, $\beta = 69^\circ 12'$, $\gamma = 81^\circ 20'$, $h = 214'$, ist CD $= 665',949$.

§ 53.

Aufg. Ein vertikal stehender Gegenstand, z. B. ein Thurm, wird aus drey Standpunkten gesehen, welche in

einer geraden Linie, und in derselben Horizontalebene liegen, worauf der Gegenstand stehet; die Entfernungen dieser drey Standpunkte von einander, desgleichen der Winkel, unter welchem man aus jedem derselben den Gegenstand siehet, sind gegeben: man soll die Höhe des Gegenstandes und die Entfernung desselben von jedem der drey Punkte finden.

Aufl. AB (Fig. 70) sey der Gegenstand, CE irgend eine gerade Linie, von welcher angenommen wird, daß sie mit B in einer und derselben Horizontalebene liegt, und C, D, E, drey Standpunkte auf derselben. Die Winkel ACB $= \alpha$, ADB $= \beta$, AEB $= \gamma$, wie auch die Entfernungen CD $=$ a, DE $=$ b, sind gegeben: man soll die Höhe AB, und die Entfernungen BC, BD, BE, finden.

1) Könnte man die Linie BD finden; so könnte man aus dem rechtwinklichten Dreyecke ABD, worin alsdann außer der Linie BD, auch noch der Winkel ADB bekannt wäre, die Höhe AB berechnen. Ist diese gefunden, so geben die rechtwinklichten Dreyecke ABC, ABE, worin die Winkel ACB, AEB, bekannt sind, auch die Entfernungen BE, BC. Es sey daher BD $=$ x.

2) Die rechtwinklichten Dreyecke ABC, ABD, ABE, geben alsdann,

$$AB = x \text{ Tang. } \beta = BC \text{ Tang. } \alpha = BE \text{ Tang. } \gamma,$$

folglich $$BC = \frac{x \text{ Tang. } \beta}{\text{Tang. } \alpha}, \quad BE = \frac{x \text{ Tang. } \beta}{\text{Tang. } \gamma}.$$

3) Im Dreyecke BCD ist aber,

$$\text{Cos. } BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2\, BD \,.\, CD} = \frac{x^2 + a^2 - \dfrac{x^2 \text{ Tang. } \beta^2}{\text{Tang. } \alpha^2}}{2\, ax}$$

und im Dreyecke BED,

$$\text{Cos. BDE} = \frac{BD^2 + DE^2 - BE^2}{2\,BD\,.\,DE} = \frac{x^2 + b^2 - \frac{x^2\,\text{Tang.}\,\beta^2}{\text{Tang.}\,\gamma^2}}{2\,bx}.$$

Da nun BDC + BDE = 180°: so ist Cos. BDC = − Cos. BDE, und daher,

$$\frac{x^2 + a^2 - \frac{x^2\,\text{Tang.}\,\beta^2}{\text{Tang.}\,\alpha^2}}{2\,ax} = - \frac{x^2 + b^2 - \frac{x^2\,\text{Tang.}\,\beta^2}{\text{Tang.}\,\gamma^2}}{2\,bx},$$

oder $bx^2 + a^2b - \frac{bx^2\,\text{Tang.}\,\beta^2}{\text{Tang.}\,\alpha^2} = -ax^2 - ab^2 + \frac{ax^2\,\text{Tang.}\,\beta^2}{\text{Tang.}\,\gamma^2}$,

oder $\frac{ax^2\,(\text{Tang.}\,\beta^2 - \text{Tang.}\,\gamma^2)}{\text{Tang.}\,\gamma^2} + \frac{bx^2\,(\text{Tang.}\,\beta^2 - \text{Tang.}\,\alpha^2)}{\text{Tang.}\,\alpha^2}$

$$= (a + b)\,ab.$$

4) Nun ist

$$\text{Tang.}\,\beta^2 - \text{Tang.}\,\gamma^2 = (\text{Tang.}\,\beta + \text{Tang.}\,\gamma)(\text{Tang.}\,\beta - \text{Tang.}\,\gamma)$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,(\beta + \gamma)\,\text{Sin.}\,(\beta - \gamma)}{\text{Cos.}\,\beta^2\,\text{Cos.}\,\gamma^2}$$ (§. 21 und 22.)

und eben so,

$$\text{Tang.}\,\beta^2 - \text{Tang.}\,\alpha^2 = (\text{Tang.}\,\beta + \text{Tang.}\,\alpha)(\text{Tang.}\,\beta - \text{Tang.}\,\alpha)$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,(\beta + \alpha)\,\text{Sin.}\,(\beta - \alpha)}{\text{Cos.}\,\beta^2\,\text{Cos.}\,\alpha^2};$$

auch ist, $\text{Tang.}\,\alpha = \frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha}$, $\text{Tang.}\,\gamma = \frac{\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Cos}\,\gamma}$. Werden diese Werthe in die vorige Gleichung gesetzt, so erhält man nach den erforderlichen Reduktionen

$$\frac{ax^2\,\text{Sin.}\,(\beta + \gamma)\,\text{Sin.}\,(\beta - \gamma)}{\text{Sin.}\,\gamma^2\,\text{Cos.}\,\beta^2} + \frac{bx^2\,\text{Sin.}\,(\beta + \alpha)\,\text{Sin.}\,(\beta - \alpha)}{\text{Sin.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\beta^2}$$

$$= (a + b)\,ab$$

und hieraus,

$$x = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\beta\,\sqrt{\frac{(a + b)\,ab}{\left[\begin{array}{l} a\text{Sin.}(\beta + \gamma)\text{Sin.}(\beta - \gamma)\text{Sin.}\alpha^2 \\ + b\text{Sin.}(\beta + \alpha)\text{Sin.}(\beta - \alpha)\text{Sin.}\gamma^2 \end{array}\right]}}$$

oder, wenn man der Kürze wegen, $a \,\text{Sin.}\,(\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\beta-\gamma)\,\text{Sin.}\,\alpha^2 = A$, $b\,\text{Sin.}\,(\beta+\alpha)\,\text{Sin.}\,(\beta-\alpha)\,\text{Sin.}\,\gamma^2 = B$ setzt,

$$x = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\beta\,\sqrt{\frac{(a+b)\,ab}{A+B}} = BD$$

5) Hieraus erhält man nun ferner,

$$AB = x\,\text{Tang.}\,\beta = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\gamma\,\sqrt{\frac{(a+b)\,ab}{A+B}}$$

$$BC = \frac{AB}{\text{Tang.}\,\alpha} = \text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\alpha\,\sqrt{\frac{(a+b)\,ab}{A+B}}$$

$$BE = \frac{AB}{\text{Tang.}\,\gamma} = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Cos.}\,\gamma\,\sqrt{\frac{(a+b)\,ab}{A+B}}$$

Beysp. Es sey $\alpha = 19^\circ\,27'\,15''$, $\beta = 13^\circ\,4'\,7''$, $\gamma = 10^\circ\,48'\,25''$, $a = 1750'$, $b = 1047'$. Hier ist $\beta - \alpha = -6^\circ\,23'\,8''$, und $\text{Sin.}\,(\beta-\alpha) = -\text{Sin.}\,6^\circ\,23'\,8''$; folglich wird B negativ, und man hat,

$$A = a\,\text{Sin.}\,(\beta+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\beta-\gamma)\,\text{Sin.}\,\alpha^2 = 3{,}100596$$

$$B = -b\,\text{Sin.}\,(\beta+\alpha)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)\,\text{Sin.}\,\gamma^2 = -2{,}200971$$

$$A+B = 0{,}899625$$

$$\log.\,(A+B) = 0{,}9540615 - 1$$

$$\log.\,\sqrt{\frac{(a+b)\,ab}{A+B}} = 4{,}8778078,$$

mithin

$$AB = 1065',754$$

$$BC = 3017',266$$

$$BD = 4591',201$$

$$BE = 5583',320.$$

Anmerk. Die Gesichtswinkel BCA, BDA, BEA, sind im Grunde nichts anders als die Elevationswinkel des Punkts A über dem Horizont, aus den drey Standpunkten C, D, E, genommen. Da man nun um diese Winkel zu finden, eben nicht nöthig hat, nach B zu visiren: so kann man, vermittelst der gefundenen Formeln, die Höhe des Punkts A über der Horizontalebene finden, wenn auch von der Höhe AB weiter nichts als dieser Punkt sichtbar ist, und in die-

ser Rücksicht ist die Aufgabe in der praktischen Geometrie von großem Nutzen.

§ 54.

Aufg. Drey Oerter, deren Lage bekannt ist, werden aus einem vierten Orte gesehen, welcher mit jenen in Einer Ebene liegt, und daselbst die Winkel gemessen, welche die Gesichtslinien mit einander machen: man soll die Entfernung dieses vierten Orts von jenen dreyen, wie auch seine Lage bestimmen.

Aufl. A, B, C, (Fig. 71) seyen drey Oerter; die Entfernungen AB $=$ a, BC $=$ b, so wie der Winkel ABC $= \alpha$ sind gegeben. D ist ein vierter Ort, woselbst die Winkel ADB $= \beta$, BDC $= \gamma$ gemessen worden; man soll die Entfernungen AD, BD, CD, und die Lage des Punkts D in Rücksicht auf A, B, C bestimmen.

1) Könnte man den Winkel BAD finden: so wären in dem Vierecke ABCD die drey Winkel ABC, BAD, ADC bekannt, folglich auch der vierte BCD. In jedem der beyden Dreyecke ABC, DBC, wären demnach zwey Winkel und eine Seite bekannt; folglich wären diese beyden Dreyecke bestimmt, und man könnte die Seiten AD, BD, CD berechnen. Es sey daher der unbekannte Winkel BAD $= \varphi$.

2) Da die vier Winkel eines jeden Vierecks zusammen $= 4$ R sind: so ist BCD $= 360° -$ ABC $-$ ADC $-$ BAD $= 360° - \alpha - \beta - \gamma - \varphi$, oder wenn man zur Abkürzung $360° - (\alpha + \beta + \gamma) = \mu$ setzt, BCD $= \mu - \varphi$.

3) Aus den beyden Winkeln BAD, ADB, und der Seite AB des Dreyecks ABD, erhält man,

$$BD = \frac{a \operatorname{Sin.} \varphi}{\operatorname{Sin.} \beta},$$

und aus den beyden Winkeln BCD, BDC, und der Seite BC des Dreyecks DBC,

$$BD = \frac{b \,\text{Sin.}\, (\mu - \varphi)}{\text{Sin.}\, \gamma}.$$

Man hat also

$$\frac{a \,\text{Sin.}\, \varphi}{\text{Sin.}\, \beta} = \frac{b \,\text{Sin.}\, (\mu - \varphi)}{\text{Sin.}\, \gamma},$$

oder $a \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Sin.}\, \varphi = b \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Sin.}\, (\mu - \varphi)$,

oder auch $a \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Sin.}\, \varphi = b \,\text{Sin.}\, \beta (\text{Sin.}\, \mu \,\text{Cos.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \mu \,\text{Sin.}\, \varphi)$

(F. 9.)

Dividirt man diese Gleichung auf beyden Seiten durch Sin. φ: so kommt

$$a \,\text{Sin.}\, \gamma = b \,\text{Sin.}\, \beta \,(\text{Sin.}\, \mu \,\text{Cot.}\, \varphi - \text{Cos.}\, \mu),$$

woraus man erhält,

$$\text{Cot.}\, \varphi = \text{Cot.}\, \mu + \frac{a \,\text{Sin.}\, \gamma}{b \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Sin.}\, \mu}.$$

4) Ist der Winkel φ gefunden: so hat man,

$$AD = \frac{a \,\text{Sin.}\, (\beta + \varphi)}{\text{Sin.}\, \beta},$$

$$BD = \frac{a \,\text{Sin.}\, \varphi}{\text{Sin.}\, \beta},$$

$$CD = \frac{b \,\text{Sin.}\, (\alpha + \beta + \varphi - 180^\circ)}{\text{Sin.}\, \gamma}.$$

Erst. Zus. Da diese Aufgabe in der Ausübung von großem Nutzen ist: so ist es der Mühe werth, einige besondere Fälle, welche in der allgemeinen Auflösung enthalten sind, in Erwägung zu ziehen.

1) Ist $\alpha = 180^\circ$, oder fällt der Punkt B auf die Linie AC: so hat man $\mu = 360^\circ - 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - (\beta + \gamma)$; folglich $\text{Cot.}\, \mu = - \text{Cot.}\, (\beta + \gamma)$, $\text{Sin.}\, \mu = \text{Sin.}\, (\beta + \gamma)$. Man hat also für diesen Fall,

$$\text{Cot.}\, \varphi = - \text{Cot.}\, (\beta + \gamma) + \frac{a \,\text{Sin.}\, \gamma}{b \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Sin.}\, (\beta + \gamma)};$$

oder auch, weil $\text{Cot.}\, (\beta + \gamma) = \dfrac{\text{Cos.}\, (\beta + \gamma)}{\text{Sin.}\, (\beta + \gamma)}$,

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{a \text{ Sin. } \gamma - b \text{ Sin. } \beta \text{ Cos. } (\beta + \gamma)}{b \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } (\beta + \gamma)}.$$

Der erstere Ausdruck ist jedoch zur Berechnung bequemer.

2) Liegt der Punkt B unterhalb der Linie AC: so muß man für α nicht den konkaven Winkel ABC, sondern den konvexen, innerhalb des Vierecks ABCD liegenden Winkel ABC nehmen; weil nur dieser, und nicht jener, mit den drey übrigen Winkeln des Vierecks zusammen $= 4$ R, wie in der Auflösung vorausgesetzt worden.

3) Ist ABC + ADC $=$ 2 R, oder $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$: so ist $\mu = 180^\circ$, Cot. $\mu = -\infty$, Sin. $\mu = 0$. Man erhält demnach aus 3)

$$\text{Cot. } \varphi = -\infty + \frac{a \text{ Sin. } \gamma}{0}.$$

Der Ausdruck für Cot. φ erscheinet also hier in einer Form, aus welcher sich sein Werth nicht bestimmen läßt.

Beschreibt man aber um das Dreyeck ABC einen Kreis: so muß, weil ABC + ADC $=$ 2 R angenommen worden, der Punkt D nothwendig auf die Peripherie dieses Kreises fallen. Diese Einschränkung gestattet daher nicht, die Winkel β, γ, willkührlich anzunehmen; vielmehr müssen, wegen der gegebenen Lage der drey Punkte A, B, C, die Winkel β, γ, eine solche Größe haben, wie es die Bedingung, daß der Punkt D auf die Peripherie des um das Dreyeck ABC beschriebenen Kreises fallen soll, erfordert. Unter der Voraussetzung aber, daß die Winkel β, γ, so bestimmt worden sind, daß die Aufgabe möglich ist, thut jeder Punkt auf der Peripherie ABCD derselben genüge. Denn es sey D′ irgend ein anderer Punkt auf der Peripherie: so ist AD′B $=$ ADB, BD′C $=$ BDC.

Was übrigens die Rechnung anbetrifft: so muß man sich aus der Trigonometrie erinnern, daß wenn ψ irgend einen konkaven oder konvexen Winkel bezeichnet, für alle Winkel zwi-

schen 90° und 180°, Cot. $\psi = -$ Cot. $(180° - \psi)$; für alle Winkel zwischen 180° und 270°, Cot. $\psi = +$ Cot. $(\psi - 180°)$; und für alle Winkel zwischen 270° und 360°, Cot. $\psi = -$ Cot. $(360° - \psi)$ sey.

Zweyt. Zus. Will man den Punkt D bloß durch Zeichnung finden: so bringe man das Dreyeck ABC auf das Papier, d. h. man mache ein Dreyeck abc, welches jenem auf dem Felde ähnlich ist; beschreibe über ab als Chorde einen Kreisbogen adb, welcher den gegebenen Winkel β in sich faßt, desgleichen über bc einen Kreisbogen bdc, welcher den gegebenen Winkel γ in sich faßt. Der Durchschnittspunkt d dieser beyden Kreise, wird alsdann den vierten Ort auf dem Papiere geben; es wird nämlich der Punkt d gegen a, b, c, die nämliche Lage haben, als der Punkt D auf dem Felde gegen A, B, C. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen.

Erst. Beysp. Es sey a $= 1153',7$, b $= 849',43$, $\alpha = 112° \, 25'$, $\beta = 27° \, 31'$, $\gamma = 19° \, 14'$. Hier ist $\mu = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) = 200° \, 50'$; also Sin. $\mu = -$ Sin. $20° \, 50'$, Cot. $\mu =$ Cot. $20° \, 50'$. Man hat also,

$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma}{b \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu} = -\frac{1153,7 \cdot \text{Sin. } 19° \, 14'}{849,43 \text{ Sin. } 27° 31' \text{ Sin. } 20° \, 50'} = -2,7229400$$

$$\text{Cot. } \mu = \text{Cot. } 20° \, 50' = \quad 2,6279121$$

also $\qquad$ Cot. $\varphi = - 0,0950279$.

Da hier die Cotangente negativ gefunden wird, so ist φ ein stumpfer Winkel. Man suche daher in den Tafeln einen Winkel, welchem die positive Cotangente 0,0950279 zugehöret; man findet ihn $= 84° \, 34' \, 18''$. Dieser Winkel von 180° abgezogen, giebt $\varphi = 95° \, 25' \, 42''$; woraus sich nun weiter die Entfernungen AD, BD, CD, sehr leicht berechnen lassen.

Zweyt. Beysp. Es sey a $= 1490'$, b $= 768'$, $\alpha = 235°$, $\beta = 37° \, 10'$, $\gamma = 48° \, 15'$. Hier ist $\mu = 39° \, 35'$; daher

$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma}{b \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \mu} = 3{,}7599939$$

$$\text{Cot. } \mu = 1{,}2095085;$$

folglich $\text{Cot. } \varphi = 4{,}9695024$

und $\varphi = 11^\circ\ 22'\ 39''.$

In diesem Beyspiele ist angenommen worden, daß der Punkt B jenseits der Linie AC, etwa in B′ liege.

Dritt. Beysp. Für $a = 2514'$, $b = 3796'$, $\alpha = 65^\circ\ 7'$, $\beta = 135^\circ\ 19'$, $\gamma = 113^\circ\ 20'$; findet man $\varphi = 24^\circ\ 53'\ 22''$.

Da in diesem Beyspiele der Winkel ADC $= \beta + \gamma$ größer als 180° ist: so kann der Punkt D nicht mehr unterhalb der Linie AC liegen, weil sonst ADC $< 180^\circ$ wäre. Auch kann er nicht in der Linie AC selbst liegen, weil sonst ADC $= 180^\circ$ wäre. Der Punkt D muß also nothwendig über AC liegen, uud daselbst mit den Punkten A, C, einen konvexen Winkel von $135^\circ\ 19' + 113^\circ\ 20' = 248^\circ\ 39'$, oder einen konkaven Winkel von 111° 21′ machen; auch muß er innerhalb des Winkels BAC fallen, weil der Winkel BAD $= \varphi$ positiv gefunden worden ist.

Anmerk. Unter den vielen Geometern, welche diese wichtige Aufgabe behandelt haben, kann ich der Kürze wegen, nur folgende anführen: Lambert (Beytr. zum Gebr. der Mathem. I. Berlin 1765, S. 73); Tempelhof (Anfangsgr. d. Anal. endl. Größen, Berlin 1769, S. 482); Langsdorf (Erklär. der Kästn. Anfgr. d. Anal. endl. Größen, Mannheim 1777, S. 432); Kästner (Geom. Abhandl. I. Samml. Göttingen 1790, S. 393); Mayer (Unterr. z. prakt. Geom. zweyte Aufl. Göttingen 1793, 2ter Th. S. 289); Pfleiderer (Arch. d. reinen und angew. Mathem. 11tes Heft, S. 318), desgleichen in seiner Trigonometrie, Tübingen 1802; Camerer (Uebers. v. Apoll. ebene Oerter, Leipzig 1796, S. 403.)

§ 55.

Aufg. Vier in einer geraden Linie liegende Objekte, werden aus Einem Standpunkte gesehen, und daselbst die Win-

Zweyt. Zus. Sollte ein Dreyeck, aus einem bestimmten Punkte auf einer seiner Seiten, nicht in gleiche Theile, sondern nach einem anderen gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so kann man am bequemsten auf folgende Art verfahren.

Es sey ABC (Fig. 23) das zu theilende Dreyeck, und T der Punkt, von welchem die Theilungslinien ausgehen sollen.

Man theile die Linie BC, worauf sich der Punkt T befindet, nach dem gegebenen Verhältnisse (§ 14), etwa in D, E, F, ziehe AT, und ihr parallel die Linien Dd, Ee, Ff, welche die Seiten AB, AC, in d, e, f treffen; aus diesen Punkten ziehe man nach T die geraden Linien dT, eT, fT, so sind BTd, dTe, TeAf, fTC die verlangten Theile.

Denn ziehet man die Linien AD, AE, AF, so verhalten sich die Dreyecke ABD, ADE, AEF, AFC, wie ihre Grundlinien BD, DE, EF, FC (El. VI. 1), und da diese Dreyecke, wie leicht zu erweisen ist, nach ihrer Ordnung den Theilen BTd, dTe, TeAf, fTC gleich sind, so verhalten sich auch diese wie die angegebenen Linien.

§ 17.

Aufg. Ein Dreyeck, aus einem innerhalb desselben gegebenen Punkte, in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 24) das gegebene Dreyeck, welches z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll; T der Punkt, von welchem die Theilungslinien ausgehen sollen.

1) Man wähle eine Seite des Dreyecks, etwa BC, nehme, wenn wie hier das Dreyeck in fünf Theile getheilt werden soll, BE = CF = $\frac{1}{5}$ BC, und ziehe die Linien Ee, Ff, den Seiten AB, AC parallel, welche die Linie AD, die durch A und T gezogen worden, in e und f treffen.

2) Ziehe aus T die Linien TB, TC, nach den Spitzen

B, C des Dreyecks ABC, und aus e, f die Parallelen eG, fI, ferner die Linien TG, TI, so wird sowohl △ ATG als △ATI = $\frac{1}{5}$ △ ABC seyn.

3) Um die übrigen Theilungspunkte zu bestimmen, darf man nur, wie im vorigen §, die Linien AG, AI, auf die Seiten AB, AC, so oft tragen, als es sich thun läßt, und im Falle sich dieses entweder nicht mehr, oder wie in der Figur gar nicht thun läßt, die Punkte H und K für die Vierecke BGTH, CITK nach § 16. Zus. 1 bestimmen.

4) Da hier die Theile ATG, BGTH, ATI, CITK, schon zusammen $\frac{4}{5}$ des Dreyecks ABC ausmachen, so muß das Dreyeck HTK der letzte Theil seyn. Wäre HTK nicht der letzte Theil, so dürfte man nur nach § 15 dieses Dreyeck in so viele gleiche Theile theilen, als man noch bedarf.

Bew. Man ziehe die Hülfslinien AE, eB, so ist

△ABE = $\frac{1}{5}$△ABC (weil BE = $\frac{1}{5}$BC),

ferner △ABE = △ABe (weil Ee ⋕ AB)

und △ABe = △ATG (weil △GBe = △GTe);

folglich △ATG = $\frac{1}{5}$△ABC.

Eben so wird bewiesen, daß

△ATI = $\frac{1}{5}$△ABC.

Das Uebrige ist vor sich klar.

Zus. Soll ein Dreyeck nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so kann man am bequemsten auf folgende Art verfahren:

Es sey z. B. das Dreyeck ABC (Fig. 25) nach einem gegebenen Verhältnisse in vier Theile zu theilen.

1) Man theile irgend eine Seite des Dreyecks, etwa BC, nach diesem Verhältnisse; die Theilungspunkte mögen D, E, F, seyn, und ziehe durch und aus T die Linien AK, TB, TC.

2) Aus den Theilungspunkten D, E, F ziehe man die

Linien Dd, Ee, Ff, der Seite AB, oder AC parallel, je nachdem sie dies- oder jenseits der Linie AK liegen.

3) Aus den Punkten d, e, f, wo diese Parallelen die AK treffen, ziehe man die Linien dG, eH, fI, der Linie TB oder TC parallel, so werden dadurch auf den Seiten des Dreyecks die Punkte G, H, I bestimmt.

4) Ziehe aus T die Linien TG, TH, TI, so sind die Dreyecke ATG, ATI, und die Vierecke BGTH, CHTI die verlangten Theile des Dreyecks.

Denn denkt man sich die Linien AD, AE, AF gezogen, so haben die Dreyecke ABD, ADE, AEF, AFC, welche zusammen das Dreyeck ABC ausmachen, das verlangte Verhältniß, indem sie sich wie ihre Grundlinien BD, DE, EF, FC verhalten. Nun sind, wie theils aus dem Vorhergehenden klar ist, theils sich leicht erweisen läßt, die Dreyecke ATG, ATI, den Dreyecken ABD, AFC, und die Vierecke BGTH, CHTI den Dreyecken ADE, AEF gleich; folglich haben auch diese Theile das verlangte Verhältniß.

§ 18.

Aufg. Ein gegebenes Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, und zwar so, daß die Theilungslinien einer bestimmten Seite desselben parallel laufen.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 26) das gegebene Dreyeck; die Anzahl der Theile, in welche dasselbe getheilt werden soll, sey 5, und BC die Seite, welcher die Theilungslinien parallel seyn sollen.

1) Man beschreibe über eine der beyden andern Seiten, etwa über AC, den Halbkreis AdefgC, und theile die Seite AC in eben so viele gleiche Theile, als das Dreyeck getheilt werden soll, also hier in 5; die Theilungspunkte seyen D, E, F, G.

2) Errichte aus diesen Theilungspunkten die Perpendikel Dd, Ee, Ff, Gg, welche den Halbkreis in den Punkten d, e, f, g treffen.

3) Trage auf AC von A nach C die Weiten Ad, Ae, Af, Ag auf, d. h. man mache Ad′ = Ad, Ae′ = Ae, u. s. w. und bestimme dadurch die Punkte d′, e′, f′, g′.

4) Ziehe aus diesen Punkten die Linien d′D′, e′E′, f′F′, g′G′ der Seite BC parallel, so sind AD′d′, D′d′e′E′, E′e′f′F′, F′f′g′G′, G′g′CB, die verlangten fünf gleichen Theile des Dreyecks ABC.

Bew. Da AC : Ad = Ad : AD (El. VI. 8)

so ist $Ad^2 = Ad'^2 = AC \times AD$ (El. VI. 17)

Da ferner die Dreyecke AD′d′, ABC, einander ähnlich sind, so ist $\triangle ABC : \triangle AD'd' = AC^2 : Ad'^2$ (El. VI. 19)

$= AC^2 : AC \,.\, AD = AC : AD$

Da nun $AD = \frac{1}{5} AC$, so ist

$$\triangle AD'd' = \tfrac{1}{5} \triangle ABC.$$

Eben so wird bewiesen, daß $\triangle AE'e' = \frac{2}{5} \triangle ABC$, $\triangle AF'f' = \frac{3}{5} \triangle ABC$, $\triangle AG'g' = \frac{4}{5} \triangle ABC$, woraus alsdann das Uebrige von selbst folgt.

Zus. Soll das Dreyeck ABC nicht in gleiche Theile, sondern nach einem bestimmten Verhältnisse getheilt werden, so darf man nur, wie aus dem Obigen leicht einzusehen ist, die Linie AC nach diesem Verhältnisse theilen, und übrigens so verfahren, wie gelehrt worden.

§ 19.

Aufg. Ein Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, so zu theilen, daß die Theilungslinien einer Linie von bestimmter Lage parallel laufen.

Auf. Es sey ABC (Fig. 27) das gegebene Dreyeck, welches z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden soll; die Theilungslinien sollen der Linie Cx parallel laufen.

1) Man beschreibe über Ax und Bx die Halbkreise Adex, Bgfx, und theile die Linie AB in fünf gleiche Theile, in D, E, F, G.

2) Errichte aus diesen Theilungspunkten die Perpendikel Dd, Ee, Ff, Gg, und trage die Weiten Ad, Ae von A in d′ und e′, desgleichen die Weiten Bg, Bf von B in g′ und f′.

3) Aus den Punkten d′, e′, f′, g′ ziehe man die Linien d′D′, e′E′, f′F′, g′G′, der Cx parallel, so werden Ad′D′, d′D′E′e′, e′E′CF′f′, f′F′G′g′, g′G′B die verlangten fünf Theile seyn.

Bew. Durch das angegebene Verfahren ist nach § 18 Zus. das Dreyeck ACx nach eben dem Verhältnisse getheilt, als die Linie Ax, desgleichen BCx nach eben dem Verhältnisse als die Linie Bx. Man hat also

1) $\triangle ACx : \triangle AD'd' = Ax : AD$.
Aber $\triangle ABC : \triangle ACx = AB : Ax$ (El. VI. 1)
folglich $\triangle ABC : \triangle AD'd' = AB : AD' = 5 : 1$.
Eben so wird bewiesen, daß
$\triangle ABC : \triangle AE'e' = AB : AE = 5 : 2$

2) $\triangle BCx : \triangle BG'g' = Bx : BG$.
Aber $\triangle ABC : \triangle BCx = AB : Bx$ (El. VI. 1.)
folglich $\triangle ABC : \triangle BG'g' = AB : BG = 5 : 1$
und eben so $\triangle ABC : \triangle BF'f' = AB : BF = 5 : 2$.
Da also $\triangle AE'e' = \frac{2}{5} \triangle ABC$, und $\triangle BF'f' = \frac{2}{5} \triangle ABC$, so muß Fünfeck $e'E'CF'f' = \frac{1}{5} \triangle ABC$ seyn.

Zus. Soll das Dreyeck ABC nicht in gleiche Theile, sondern nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so darf man nur die Linie AB nach diesem Verhältnisse theilen, und alsdann so verfahren wie gelehrt worden. Der Grund hiervon ist leicht einzusehen.

§ 20.

Aufg. Ein Parallelogramm in eine gegebene Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien zweyen gegenüber liegenden Seiten des Parallelogramms parallel laufen.

Aufl. Das zu theilende Parallelogramm sey ABCD (Fig. 28); die Anzahl der Theile sey 6, und die Seiten, welchen die Theilungslinien parallel laufen sollen, seyen AB und CD.

Man theile eine der beiden andern Seiten, etwa AD, in 6 gleiche Theile, in E, F, G, H, I, und ziehe aus diesen Punkten die Linien Ee, Ff, Gg, u. s. w. den Seiten AB, CD parallel, so ist die Theilung geschehen.

Zus. Sollte das Parallelogramm nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so dürfte man nur die Linie AB, anstatt in gleiche Theile, nach dem gegebenen Verhältnisse theilen, und alsdann wie vorhin verfahren.

§ 21.

Aufg. Ein Parallelogramm durch eine Linie von bestimmter Lage nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 29) das zu theilende Parallelogramm.

1) Man theile eine Seite desselben, etwa AD nach dem gegebenen Verhältnisse; der Theilungspunkt sey z. Mache zE = Az und ziehe BE. Hat nun BE die verlangte Lage, so sind △ ABE und Viereck BCDE die verlangten Theile.

2) Soll aber die Theilungslinie der xy parallel seyn, so halbire man die Linie BE in n und ziehe durch diesen Punkt die Linie GH der xy parallel, so werden ABHG und HCDG die verlangten Theile seyn.

3) Hat die Linie xy eine solche Lage, daß einer der Punkte G, H nicht mehr auf die Seite AD oder BC fallen kann, wie Fig. 30; so ziehe man die Linie BF der xy parallel, beschreibe über AF den Halbkreis AeF, errichte aus E das Perpendikel Ee, mache AG = Ae, und ziehe GH der xy parallel, so werden AHG, HBCDG die verlangten Theile des Parallelogramms seyn.

Bew. Aus El. I. 41 und VI. 1 ist klar, daß

$$\text{Parall. } ABCD : \triangle ABE = AD : Az$$

woraus die Richtigkeit von (1) erhellet.

Da ferner (Fig. 29) HG in n halbirt ist, so ist $\triangle BnH = \triangle EnG$, und daher auch das Verfahren in (2) erwiesen.

In Fig. 30 hat man,

$$\text{Parall. } ABCD : \triangle ABF = 2 AD : AF,$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABF, AHG,

$$\begin{aligned} \triangle ABF : \triangle AHG &= AF^2 : AG^2 \ (= Ae^2) \\ &= AF^2 : AF \cdot AE, \\ &= AF \ : AE, \end{aligned}$$

folglich durch das Zusammensetzen beyder Proportionen,

$$\text{Parall. } ABCD : \triangle AHG = 2 AD : AE = AD : Az.$$

§ 22.

Aufg. Ein Trapez mit zwey parallelen Seiten, in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, daß die Theilungslinien diesen Seiten parallel laufen.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 31) das gegebene Trapez, dessen beide Seiten AB, CD parallel sind, und welches z. B. in drey gleiche Theile getheilt werden soll.

1) Ueber AB, der größeren von den beyden parallelen Seiten, beschreibe man den Halbkreis AFB; ziehe DE der BC parallel, und beschreibe aus B mit BE den Bogen EF, welcher den Halbkreis in F schneidet.

2) Aus F lasse man auf AB das Perpendikel FG herab, und theile die Linie AG in drey gleiche Theile in K und L, und errichte aus diesen Punkten die Perpendikel Kk, Ll.

3) Trage auf AB von B nach A die Weiten Bk, Bl in k′ und l′; ziehe aus diesen Punkten die Linien k′O, l′M der BC parallel, und aus den Punkten O, M, wo diese Parallelen die AD treffen, die Linien MN, OP der AB parallel, so werden ABNM, MNPO, OPCD die verlangten drey Theile des Trapez ABCD seyn.

Bew. Man verlängere die Linien AD, BC, bis sie in Z zusammenstoßen, so sind die Dreyecke DZC, OZP, MZN, AZB einander ähnlich; ferner ist

$$DC = BE = BF,\ OP = Bk' = Bk,\ MN = Bl' = Bl.$$

Man hat daher

$$\triangle OZP : \triangle DZC = OP^2 : CD^2$$
$$= Bk^2 : BF^2 = BK : BG,$$

folglich $\triangle OZP - \triangle DZC : \triangle DZC = BK - BG : BG$

oder Trap. $DOPC : \triangle DZC = GK : BG = \frac{1}{3} AG : BG.$

Eben so wird bewiesen, daß

Trap. $DMNC : \triangle DZC = GL : BG = \frac{2}{3} AG : BG$

Trap. $DABC : \triangle DZC = AG : BG = \frac{3}{3} AG : BG.$

Hieraus ergiebt sich

Trap. $DOPC : DMNC : DABC = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : \frac{3}{3}$
$= 1 : 2 : 3$

Zus. Sollte das Trapez ABCD nicht in gleiche Theile, sondern nach einem anderen gegebenen Verhältnisse getheilt werden, so darf man nur die Linie AG nach diesem Verhältnisse theilen und übrigens wie vorhin verfahren.

§ 23.

Aufg. Eine gegebene Figur nach einem bestimmten Verhältnisse in zwey Theile zu theilen, und zwar so, daß der eine Theil der ganzen Figur ähnlich sey.

Aufl. Es sey ABCDE (Fig. 32) die gegebene Figur.

1) Man theile eine Seite der Figur, etwa AB, nach dem gegebenen Verhältnisse; der Theilungspunkt sey Z.

2) Beschreibe über AB den Halbkreis AzB, und errichte aus Z das Perpendikel Zz, welches den Halbkreis in z trifft.

3) Mache Ab = Az, und beschreibe über Ab eine Figur Abcde, welche der gegebenen ABCDE ähnlich ist, so wird die gebrochene Linie bcde die Figur so theilen, wie verlangt worden.

Bew. $ABCDE : Abcde = AB^2 : Ab^2$

$= AB^2 : Az^2 = AB : AZ,$

folglich $ABCDE - Abcde : Abcde = AB - AZ : AZ$

oder $BCDEedcb : Abcde = ZB : AZ.$

III. Berechnung des Flächeninhalts geradlinigter Figuren.

§ 24.

Aufg. Aus der gegebenen Grundlinie und Höhe eines Dreyecks den Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Wenn a die Grundlinie, h die Höhe, und q den Inhalt eines Dreyecks bezeichnet; so ist

$$q = \frac{ah}{2}.$$

Dieser Satz ist bekannt genug und wird in allen Elementarbüchern der Geometrie bewiesen.

Zus. Aus dieser Gleichung erhält man

$$h = \frac{2q}{a}, \quad a = \frac{2q}{h}.$$

Vermittelst der ersten dieser beyden Formeln läßt sich die Höhe eines Dreyecks bestimmen, wenn der Inhalt und die Grundlinie desselben, und vermittelst der zweyten, die Grundlinie eines Dreyecks, wenn der Inhalt und die Höhe desselben gegeben ist.

Erstes Beyspiel. Die Grundlinie eines Dreyecks mißt 325° 7′ 9″, und die Höhe 67° 8′ 3″: wie groß ist der Flächeninhalt desselben? Antw. 11049,16785 □°, oder 11049 □° 16 □′ 78 □″ 50 □‴.

Zweyt. Beysp. Die Grundlinie eines Dreyecks mißt 763° 0′ 5″, und die Höhe 9′ 3″ 7‴: wie groß ist der Flächeninhalt desselben? Antw. 357,488925 □°, oder 357 □° 48 □′ 89 □″ 25 □‴.

Dritt. Beysp. Der Flächeninhalt eines Dreyecks ist 7325 □° 26□′, und seine Grundlinie 58° 9′ 7″: wie groß ist die Höhe desselben? Antw. 248°,4402 . . ., oder 248° 4′ 4″ 0‴ 2ᴵⱽ . . .

Viert. Beysp. Der Flächeninhalt eines Dreyecks ist 62583 □° 04□′ 79 □″, und seine Höhe 127° 5′: wie groß ist die Grundlinie desselben? Antw. 981°,6948 . . . ., oder 981° 6′ 9″ 4‴ 8ᴵⱽ.

§ 25.

Aufg. Den Inhalt eines jeden Vielecks zu berechnen.

Aufl. Man zerlege das Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreyecke, berechne alle diese Dreyecke, indem man die Grundlinie eines jeden mit seiner halben Höhe multiplicirt, und addire alle gefundenen Inhaltszahlen zusammen, so erhält man den Inhalt des Vielecks.

Zus. Zur Verkürzung der Arbeit kann man jedesmal, wo es sich thun läßt, zweyen Dreyecken eine gemeinschaftliche Grundlinie geben. So z. B. kann man das Vieleck ABCDEFG

(Fig. 33), in die Dreyecke BAG, BCG, DCG, DFG, DEF zerlegen, von welche das erste und zweyte BG, das dritte und vierte aber DG zur gemeinschaftlichen Grundlinie haben. Man hat alsdann, wenn die nöthigen Perpendikel gezogen worden,

$$\text{Pol. } ABCDEFG = \tfrac{1}{2}[Aa.BG + Cc.DG + Cd.DG + Ff.DG + Ee.DF].$$

$$= \tfrac{1}{2}[(Aa+Cc)BG+(Cd+Ff)DG+Ee.DF].$$

Beyspiel. Es sey BG $= 61° 5'$, DG $= 75° 9' 3''$, DF $= 67° 3'$, Aa $= 15° 7'$, Cc $= 28° 0' 9''$, Cd $= 21° 1' 7''$, Ff $= 22°$, Ee $= 16° 8'$: wie groß ist der Flächeninhalt des Siebenecks ABCDEF? Antwort. 3550,81155 □°, oder 3550 □° 81 □′ 15 □″ 50 □‴.

Anmerk. Ein Trapez ABCD (Fig. 34) mit zwey parallelen Seiten AD, BC, läßt sich immer durch die Diagonale BD, in zwey Dreyecke ABD, BDC zerlegen, deren Grundlinien eben diese Seiten des Trapezes, und deren Höhen Bb, Dd, der Höhe desselben GH gleich sind. Daher ist für diesen Fall,

$$\text{Trap. } ABCD = \tfrac{1}{2} GH (AD + BC)$$

Kann man ein Vieleck in lauter solche Trapeze zerlegen, so läßt sich auch sein Inhalt leichter berechnen. Dies ist Fig. 35 der Fall, wenn die Linien AB, CD, EF, GH, IK, sämmtlich einander parallel sind. Man findet nämlich alsdann, wenn ae auf diesen Linien perpendikulär stehet, den Inhalt des Vielecks =

$$\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} ab(AB+CD)+bc(CD+EF) \\ +cd(EF+GH)+de(GH+IK) \end{array}\right].$$

Fallen die Punkte A, B, in einen einzigen M, desgleichen die Punkte I, K, in einen einzigen N zusammen, so daß man statt der Trapeze ABDC, GHKI, die Dreyecke CMD, GNH hat: so ist AB sowohl, als IK = 0, und man findet den Inhalt der Figur =

$$\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} ab.CD+bc(CD+EF) \\ +cd(EF+GH)+de.GH \end{array}\right].$$

Sind noch überdies die Entfernungen aller dieser Parallelen einander gleich, oder ist ab = bc = cd = de, so findet man den Inhalt =

$$ab(CD + EF + GH),$$

d. h. man findet den Inhalt der Figur, wenn man die Summe aller Parallelen mit dem gleichen Abstande derselben multiplicirt.

§ 26.

Aufg. Aus zwey Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks, den Inhalt desselben zu finden.

Aufl. In dem Dreyecke ABC (Fig. 36) sind die Seiten AB, AC, und der Winkel BAC gegeben; man sucht den Inhalt desselben. Es sey $AC = a$, $AB = b$, $\angle BAC = \alpha$, und der gesuchte Inhalt des Dreyecks $= q$.

1) Man ziehe das Perpendikel BD: so ist

$$BD = b \text{ Sin. } \alpha$$

2) Daher $$\triangle ABC = \frac{AC \,.\, BD}{2} = \frac{ab \text{ Sin. } \alpha}{2}$$

oder $$q = \frac{ab \text{ Sin. } \alpha}{2}$$

Erst. Zus. Hieraus folgt: daß sich zwey Dreyecke, welche einen gleichen Winkel haben, wie die Produkte aus den diesen Winkel einschließenden Seiten verhalten.

Da jedes Parallelogramm durch seine Diagonalen in zwey gleiche Dreyecke getheilt wird; so gilt dieser Satz auch für Parallelogramme, welche einen gleichen Winkel haben.

Zweyt. Zus. Aus der Gleichung $q = \frac{ab \text{ Sin. } \alpha}{2}$, erhält man,

$$a = \frac{2q}{b \text{ Sin. } \alpha}, \quad b = \frac{2q}{a \text{ Sin. } \alpha}, \quad \text{Sin. } \alpha = \frac{2q}{ab}$$

Die wirkliche Berechnung aller dieser Formeln geschiehet am leichtesten mit Hülfe der Logarithmen.

Erstes Beyspiel. Die eine Seite eines Dreyecks mißt 257′ 9″, die andere 356′ 3″, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel 25° 13′: wie groß ist der Inhalt dieses Dreyecks? Antw. 19574,46 □′, oder 19574 □′ 46 □″.

Zweyt. Beysp. Der Flächeninhalt eines Dreyecks ist 27534 □', eine Seite desselben mißt 67' 3", und einer von den beyden Winkeln, welche an dieser Seite liegen 121° 5': wie groß ist die andere an diesem Winkel liegende Seite? Antw. 955' 4" 3'''.

Dritt. Beysp. Der Inhalt eines Dreyecks ist 1254 □' 26 □", eine seiner Seiten ist = 138', und die andere = 59': wie groß ist der Winkel, welcher von diesen beyden Seiten eingeschlossen wird? Antw. 17° 56', 40", 3, oder 162° 3' 19", 7.

Anmerk. Die doppelte Bestimmung des Winkels in dem letzten Beyspiele entstehet daher, weil jedem Sinus zwey Winkel zugehören, die zusammen 180° ausmachen. Es giebt folglich immer zwey Dreyecke, welche einen gegebenen Inhalt und zwey gegebene Seiten haben, wie sich auch sehr leicht durch Zeichnung darthun läßt.

Es seyen a und b (Fig. 37) die gegebenen Seiten, und der gegebene Inhalt des Dreyecks = q. Man nehme eine von diesen beyden Linien, etwa a, zur Grundlinie des Dreyecks an, und mache AC = a; beschreibe mit CF = b den Halbkreis FBDE, und errichte aus E, wo er die verlängerte AC trifft, das Perpendikel Ee = $\frac{2q}{a}$, so ist Ee die Höhe des Dreyecks (§ 24 Zus.). Man ziehe hierauf eB der AE parallel, und aus den Punkten B, D, wo solche den Halbkreis schneidet, die Linien CB, CD, AB, AD; so sind ABC, ADC die verlangten Dreyecke, weil sie die erforderliche Höhe, und die gegebenen Seiten haben. Nun sind in dem gleichschenklichten Dreyecke BCD die Winkel CBD, CDB einander gleich; ferner ist, weil eB der AE palallel, DBC = BCA, und BDC = DCE; folglich ist auch BCA = DCE, und daher ACD + ACB = ACD + DCE = 2R.

§ 27.

Aufg. Aus zwey gegebenen Winkeln eines Dreyecks und einer seiner Seiten den Inhalt desselben zu finden.

Aufl. In dem Dreyecke ABC (Fig. 36) sind zwey Winkel, folglich auch der dritte, nebst der Seite AC gegeben; man sucht den Inhalt desselben. Es sey BAC = α, ABC = β,

ACB = γ, AC = a, und der gesuchte Inhalt = q. Man ziehe BD auf AC senkrecht: so ist

1) $\text{Sin.}\,\beta : \text{Sin.}\,\gamma = a : AB$

daher $$AB = \frac{a\,\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,\beta}$$

2) In dem bey D rechtwinklichten Dreyecke ABD ist

$$BD = AB\,\text{Sin.}\,\alpha = \frac{a\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma}{\text{Sin.}\,\beta}$$

3) Daher $$q = \tfrac{1}{2}\,AC\,.\,BD = \frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma}{2\,\text{Sin.}\,\beta}$$

Die Berechnung dieser Formel geschiehet am leichtesten durch Logarithmen.

Zus. Ist das Dreyeck gleichschenklicht, so hat man,

1) Wenn $\beta = \gamma$, $q = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{Sin.}\,\alpha$.

2) Wenn $\alpha = \gamma$, so ist $\beta = 180^\circ - 2\alpha$, und daher $\text{Sin.}\,\beta = \text{Sin.}\,2\alpha = 2\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,a$ (f. 25), folglich

$$q = \frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha}{2\,\text{Cos.}\,\alpha} = \tfrac{1}{2}\,a^2\,\text{Tang.}\,\alpha$$

Erst. Beysp. Wenn $\alpha = 38^\circ\,40'$, $\beta = 83^\circ\,30'$, also $\gamma = 57^\circ\,50'$, und $a = 120'$: so ist der Flächeninhalt des Dreyecks 3832,61 □'.

Zweyt. Beysp. Wenn $\alpha = 128^\circ\,25'$, $\beta = 27^\circ\,5'$, also $\gamma = 24^\circ\,30'$, und $a = 135'$: so ist der Flächeninhalt des Dreyecks 6503,19 □'.

3. Beysp. Wenn $\alpha = 37^\circ\,5'\,24''$, $\beta = 67^\circ\,45'\,23''$, also $\gamma = 75^\circ\,9'\,13''$, und $a = 435'$: so ist der Flächeninhalt des Dreyecks 59587,36 □'.

§ 28.

Aufg. Den Inhalt eines Dreyecks aus seinen Winkeln und seiner Höhe zu finden.

Aufl. Es sey in dem Dreyecke ABC (Fig. 36) der Win-

kel BAC $= \alpha$, ABC $= \beta$, ACB $= \gamma$, und die Höhe BD $= h$ gegeben; der gesuchte Inhalt sey $= q$: so ist

1) Nach § 27 $\quad q = \frac{AC^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma}{2 \text{ Sin. } \beta}$

2) Nach § 24 Zus. $AC = \frac{2q}{h}$.

3) Man substituire 2) in 1), so erhält man

$$q = \frac{2q^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma}{h^2 \text{ Sin. } \beta},$$

und daher $\quad q = \frac{h^2 \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma}$

Beysp. Für $h = 357\frac{1}{2}'$, $\alpha = 31^\circ 13' 7''$, $\beta = 106^\circ 41' 53''$, ist $q = 176203{,}6 \, \square'$.

§ 29.

Aufg. Den Inhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten zu finden.

Aufl. In dem Dreyecke ABC (Fig. 36) sind die drey Seiten AB, AC, BC gegeben, und es wird der Inhalt desselben gesucht. Es sey AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, und der Inhalt $= q$.

1) Aus der Trigonometrie ist bekannt, daß

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos. } A$$

also $\quad \text{Cos. } A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2) Hieraus erhält man,

$$1 + \text{Cos. } A = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

$$1 - \text{Cos. } A = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$$

3) Die Multiplikation dieser beyden Gleichungen giebt

$$1 - \text{Cos. } A^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2b^2}$$

oder wenn man Sin. A^2 für $1 - \text{Cos. } A^2$ und K für den Zähler des Bruches zur Rechten des Gleichheitszeichens setzt,

$$\text{Sin. } A^2 = \frac{K}{4a^2b^2}, \text{ und Sin. } A = \frac{\sqrt{K}}{2ab}$$

4) Nach § 26 ist aber $q = \frac{ab \text{ Sin. } A}{2}$; man hat daher

$$q = \frac{\sqrt{K}}{4} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich folgende Regel, um den Inhalt eines Dreyecks aus seinen drey Seiten zu berechnen:

1) Man addire alle drey Seiten zusammen. — 2) Man ziehe von der Summe jeder zwey Seiten die dritte ab — 3) Man multiplicire die aus (1) erhaltene Summe mit den drey aus (2) erhaltenen Resten. — 4) Ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel, und dividire diese Wurzel durch 4.

Die wirkliche Berechnung geschiehet, wenn a, b, c nicht etwa sehr kleine Zahlen sind, am leichtesten durch Logarithmen.

Zus. Für das gleichseitige Dreyeck ist $a = b = c$; folglich

$$q = \frac{\sqrt{3a^4}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Für das gleichschenklichte Dreyeck setze man $c = b$, so wird

$$q = \frac{\sqrt{a^2(2b+a)(2b-a)}}{4} = \frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)(2b-a)}$$

Beysp. Für $a = 563'$, $b = 295'$, $c = 387'$, ist $q = 53447{,}73$ □'.

§ 30.

Aufg. Aus den vier gegebenen Seiten eines Trapez, deren

deren zwey einander parallel sind, den Flächeninhalt desselben zu berechnen.

Aufl. Es seyen AB, DC (Fig. 38) die beyden parallelen Seiten des Trapez ABCD, und AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Man ziehe BE der AD parallel, und setze der Kürze wegen, CE = c — a = f: so ist

1) In dem Dreyeck BEC, BC = b, CE = f, BE = AD = d; folglich nach dem vorigen §

$$\triangle BEC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+d+f)(b+d-f)(b+f-d)(d+f-b)}.$$

2) Man ziehe das Perpendikel PQ: so ist solches zugleich die Höhe des Trapezes und des Dreyecks; man hat daher

$$\text{Trap. } ABCD = \tfrac{1}{2}PQ\,(AB+CD) \text{ (§ 25 Anmerk.)}$$

und $$\triangle BEC = \tfrac{1}{2}PQ\,.\,CE, \text{ folglich}$$

$$\text{Trap. } ABCD : \triangle BEC = \tfrac{1}{2}PQ\,(AB+CD) : \tfrac{1}{2}PQ\,.\,CE$$
$$= AB+CD : CE = a+c : f$$

und daher

$$\text{Trap. } ABCD = \frac{a+c}{f}\triangle BEC =$$
$$\frac{a+c}{4f}\sqrt{(b+d+f)(b+d-f)(b+f-d)(d+f-b)}$$

Beisp. Für a = 324′, b = 137′, c = 431′, d = 122′, ist q = 44079,76 □′.

§ 31.

Aufg. Von einem Vierecke, dessen gegenüber liegende Winkel zusammen zweyen Rechten gleich sind, (um welches sich folglich ein Kreis beschreiben läßt,) sind alle Seiten gegeben; man sucht den Inhalt desselben.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 39) das gegebene Viereck, worin also der Voraussetzung zufolge, ABC + ADC = 2R. Es sey AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Der unbekannte Winkel ADC = φ, und daher ABC = 180° — φ. Man ziehe die Diagonale AC; so ist,

1) Im Dreyecke ADC,

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd\,\text{Cos.}\,\varphi$$

und im Dreyecke ABC

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\varphi$$

(weil $\text{Cos.}\,ABC = \text{Cos.}(180^\circ - \varphi) = -\text{Cos.}\,\varphi$.) Man hat also

$$a^2 + b^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,\varphi = c^2 + d^2 - 2\,cd\,\text{Cos.}\,\varphi$$

und daher $$\text{Cos.}\,\varphi = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2\,ab + 2\,cd}$$

2) Hieraus erhält man

$$1 + \text{Cos.}\,\varphi = \frac{c^2 + 2\,cd + d^2 - a^2 + 2\,ab - b^2}{2\,ab + 2\,cd}$$

$$= \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2\,ab + 2\,cd}$$

$$= \frac{(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{2\,ab + 2\,cd}$$

ferner $$1 - \text{Cos.}\,\varphi = \frac{a^2 + 2\,ab + b^2 - c^2 + 2\,cd - d^2}{2\,ab + 2\,cd}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2\,ab + 2\,cd}$$

$$= \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2\,ab + 2\,cd}$$

3) Die Multiplikation dieser beyden Gleichungen giebt

$$1 - \text{Cos.}\,\varphi^2 = \text{Sin.}\,\varphi^2 =$$

$$\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)}{(2\,ab + 2\,cd)^2},$$

oder, wenn man K für den Zähler des Bruches setzt, und auf beyden Seiten die Wurzel auszieht,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{\sqrt{K}}{2\,ab + 2\,cd}$$

4) Nun ist $$\triangle ADC = \frac{cd\,\text{Sin.}\,\varphi}{2}$$

und $\triangle ABC = \frac{ab \, Sin. (180^\circ - \varphi)}{2} = \frac{ab \, Sin. \varphi}{2}$;

folglich ist Trap. $ABCD = \frac{(ab + cd) \, Sin. \varphi}{2}$,

oder wenn für Sin. φ sein Werth aus 3) gesetzt wird,

$$\text{Trap. } ABCD = \frac{\sqrt{K}}{4} =$$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d+a-b)(c+d+b-a)}$$

Die in dieser Formel enthaltene Regel für die Berechnung solcher Vierecke, läßt sich auf folgende Art durch Worte ausdrücken:

Man addire jede drey Seiten des Vierecks zusammen, und ziehe immer die vierte von der erhaltenen Summe ab; multiplicire hierauf diese vier Reste mit einander, ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel, und dividire die Wurzel durch 4.

† § 32.

Aufg. Den Inhalt eines Vierecks, worin zwey gegenüber liegende Winkel gleich sind, aus seinen vier Seiten zu bestimmen.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 40) ein Viereck, worin die Winkel BAD, BCD gleich sind, und $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, der gesuchte Inhalt $= q$. Man setze den unbekannten Winkel $BAD = BCD = \varphi$: so ist im Dreyecke BAD

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad \, Cos. \varphi$$

und im Dreyecke BCD, $BD^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \, Cos. \varphi$,

folglich $a^2 + d^2 - 2\,ad \, Cos. \varphi = b^2 + c^2 - 2\,bc \, Cos. \varphi$

und daher $Cos. \varphi = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,ad - 2\,bc}$.

Verfährt man nun weiter wie im vorigen §, so erhält man endlich

$$q = \frac{1}{4}\,\frac{ad+bc}{ad-bc}\sqrt{\left[\begin{matrix}(a+b+c+d)\,(a+b-c-d)\\(a+d-b-c)\,(b+d-a-c)\end{matrix}\right]}.$$

Beysp. Wenn $a = 37°$, $b = 32°\ 7'$, $c = 29°$, $d = 16°\ 4'$: so ist $q = 713{,}0677\ \Box°$.

Anmerk. In diesem Beyspiele werden zwey der Faktoren, welche sich unter dem Wurzelzeichen des für q gefundenen Ausdruckes befinden, negativ; denn man hat $a+d-b-c = -8{,}3$, und $b+d-a-c = -16{,}9$. Da aber zwey negative Größen ein positives Produkt geben, so kann man das Zeichen $-$ gänzlich außer Acht lassen. Ferner wird für dieses Beyspiel der Nenner des Bruches $\frac{ad+bc}{ad-bc}$, und folglich der Bruch selbst negativ; aber auch hierauf braucht man nicht zu achten, weil die Wurzelgröße sowohl positiv als negativ genommen werden kann. Die Aufgabe kann auch unmöglich werden, wie z. B. wenn $a = 17°$, $b = 23°$, $c = 27°$, $d = 40°$, angenommen wird.

§ 33.

Aufg. **Den Inhalt eines Vierecks aus seinen Seiten zu bestimmen, wenn einer seiner Winkel ein Rechter ist.**

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 41) das Viereck, und BAD ein rechter Winkel. Es sey ferner $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, und der gesuchte Inhalt $= q$: so ist

1) $BD^2 = a^2 + d^2$ (El. I. 47), oder $f^2 = a^2 + d^2$, wenn man der Kürze wegen $BD = f$ setzt.

2) In dem Dreyecke BCD sind demnach alle drey Seiten bekannt; man hat daher nach § 29,

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f)(b+c-f)(b+f-c)(c+f-b)}.$$

3) Da BA auf AD perpendikular stehet, so ist

$$\triangle BAD = \tfrac{1}{2}ad,$$

folglich, weil Trap. ABCD $= \triangle BAD + \triangle BCD$

$$q = \tfrac{1}{2}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+f)(b+c-f)(b+f-c)(c+f-b)}$$

Beysp. Für $a = 28'$, $b = 32'$, $c = 41'$, $d = 39'$, ist $f = 48{,}0104$, und $q = 1194{,}3332\ \Box'$.

§ 34.

Aufg. Den Inhalt eines Vierecks aus seinen beyden Diagonalen und dem Winkel, welchen sie einschließen, zu finden.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 42) das gegebene Viereck, und AC = a, BD = b, ∠ AZD = α.

1) Man ziehe durch A und C die Linien EF, HG, der Diagonale BD, und durch B und D, die Linien FG, EH, der AC parallel; so sind AFGC, AEHC, zwey Parallelogramme, und ihre Hälften die Dreyecke ABC, ADC. Das Viereck ABCD ist demnach die Hälfte des Parallelogramms EFGH, und daher, wenn man sich die Linie FH gezogen denkt, dem Dreyecke FEH gleich.

2) Nach § 26 ist aber, da EH = AC = a, FF = BD = b, und ∠ FEH = AZD = α,

$$\triangle FEH = \frac{ab \text{ Sin. } \alpha}{2};$$

folglich ist auch Trap. ABCD $= \frac{ab \text{ Sin. } \alpha}{2}$.

Zus. Jedes Viereck ist also einem Dreyecke gleich, worin zwey Seiten den beyden Diagonalen des Vierecks, und der Winkel, welchen jene einschließen, dem Winkel, unter welchem sich diese durchschneiden, gleich ist. Hierbey ist es übrigens gleichgültig, welcher von den beyden Winkeln AZD oder AZB für den Winkel des Dreyecks angenommen wird, weil beyde gleich große Dreyecke geben (§ 26 Anmerk.).

§ 35.

Aufg. In einem Vierecke sind drey Winkel, folglich auch der vierte, und zwey gegenüber liegende Seiten gegeben: man sucht den Inhalt desselben.

Aufl. ABCD (Fig. 43) sey das Viereck, und AB, DC,

die gegebenen Seiten. Es sey AB $=$ a, CD $=$ b, BAD $= \alpha$, ABC $= \beta$, BCD $= \gamma$, und ADC $= 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$; der gesuchte Inhalt $=$ q. Man verlängere die beyden nicht gegebenen Seiten AD, BC, bis sie in E zusammen stoßen.

1) In dem Dreyecke ABE, sind die beyden Winkel EAB $= \alpha$, EBA $= \beta$, und die Seite AB $=$ a gegeben; man hat daher nach § 27.

$$\triangle AEB = \frac{a^2 \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \beta}{2 \,\text{Sin.}\, (\alpha + \beta)},$$

(weil Sin. AEB $=$ Sin. $[180^\circ - (\alpha + \beta)] =$ Sin. $(\alpha + \beta)$).

2) Eben so findet man,

$$\triangle CED = \frac{b^2 \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Sin.}\, \delta}{2 \,\text{Sin.}\, (\alpha + \beta)},$$

(weil CD $=$ b, Sin. DCE $=$ Sin. $(180^\circ - \gamma) =$ Sin. γ, Sin. CDE $=$ Sin. $(180^\circ - \delta) =$ Sin. δ).

3) Da nun Trap. ABCD $= \triangle AEB - \triangle CED$; so ist

$$q = \frac{a^2 \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \beta - b^2 \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Sin.}\, \delta}{2 \,\text{Sin.}\, (\alpha + \beta)}.$$

Anmerk. Bey der wirklichen Berechnung verfährt man am leichtesten so, daß man jedes der Dreyecke AEB, CED, besonders berechnet, und die gefundenen Inhaltszahlen von einander abziehet.

Beysp. Es sey a $= 536'$, b $= 379'$, $\alpha = 83^\circ\ 28'$, $\beta = 69^\circ\ 34'$, $\gamma = 102^\circ\ 20'$: so ist q $= 145209{,}1\ \square'$.

§ 36.

Aufg. Den Inhalt eines Trapez mit zwey parallelen Seiten zu finden, wenn die Höhe desselben, eine der parallelen Seiten, und die beyden daran liegenden Winkel gegeben sind.

Aufl. ABCD (Fig. 44. 45.) sey ein Trapez mit zwey parallelen Seiten AD, BC, und PQ auf diesen Seiten perpendikulär. Es sey die Seite AD $=$ a, die Höhe PQ $=$ h,

und die Winkel BAD $= \alpha$, ADC $= \delta$, der gesuchte Inhalt $= q$.

Man ziehe AE der DC parallel, welche die Linie BC in E schneidet. Dieser Punkt fällt entweder auf die Linie BC selbst (Fig. 44), oder auf ihre Verlängerung (Fig. 45). Der erste Fall findet statt, wenn $\alpha + \delta > 2R$, der zweyte, wenn $\alpha + \delta < 2R$.

Erster Fall. 1) In dem Dreyecke ABE (Fig. 44) ist $\angle$ ABE $= 180^\circ - \alpha$, AEB $=$ BCD $= 180^\circ - \delta$, BAE $=$ BAD $+$ ADC $-$ (EAD $+$ ADC) $= \alpha + \delta - 180^\circ$; also Sin. ABE $=$ Sin. α, Sin. AEB $=$ Sin. δ, Sin. BAE $= -$ Sin. $(\alpha + \delta)$, und daher (§ 28)

$$\triangle ABE = -\frac{h^2 \text{ Sin.} (\alpha + \delta)}{2 \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \delta}.$$

2) Der Inhalt des Parallelogramms AECD ist $= ah$. Da nun Trap. ABCD $=$ AECD $+ \triangle$ ABE: so ist,

$$q = ah - \frac{h^2 \text{ Sin.} (\alpha + \delta)}{2 \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \delta}.$$

Zweyter Fall. 1) In dem Dreyecke ABE (Fig. 45) ist ABE $=$ BAD $= \alpha$, AEB $=$ ADC $= \delta$, BAE $= 180^\circ - (\alpha + \delta)$; also Sin. ABE $=$ Sin. α, Sin. AEB $=$ Sin. δ, Sin. BAE $=$ Sin. $(\alpha + \delta)$, und daher (§ 28)

$$\triangle ABE = \frac{h^2 \text{ Sin.} (\alpha + \delta)}{2 \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \delta}.$$

2) Der Inhalt des Parallelogramms AECD ist $= ah$. Da nun Trap. ABCD $=$ AECD $- \triangle$ ABE: so ist,

$$q = ah - \frac{h^2 \text{ Sin.} (\alpha + \delta)}{2 \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \delta}.$$

Man findet also für den Inhalt des Trapezes einen und denselben Ausdruck, der Punkt E mag auf die Linie BC oder ihre Verlängerung fallen, wie sich auch schon, wegen der All-

gemeinheit der trigonometrischen und algebraischen Formeln erwarten ließ.

Zus. Für $\alpha + \delta = 180°$, ist Sin. $(\alpha + \delta) = 0$, und $q = ah$, wie auch seyn muß, weil alsdann das Trapez sich in ein Parallelogramm verwandelt.

Für $\alpha + \delta = 90°$, ist Sin. $(\alpha + \delta) = 1$, und Sin. δ $=$ Sin. $(90° - \alpha) =$ Cos. α; folglich

$$q = ah - \frac{h^2}{2 \text{Sin.} \alpha \text{ Cos.} \alpha} = ah - \frac{h^2}{\text{Sin. } 2\alpha} \quad (\text{F. } 25)$$

Erst. Beysp. Es sey $\alpha = 117° \; 36'$, $\delta = 135° \; 29'$, $a = 257'$, $h = 87'$. Hier ist $\alpha + \delta = 253° \; 5'$, und Sin. $(a + \delta) = -$ Sin. $73° \; 5'$; ferner ist Sin. $\alpha =$ Sin. $62° \; 24'$, Sin. $\delta =$ Sin. $44° \; 31'$; daher

$$q = 257 \cdot 87 + \frac{87^2 \, . \, \text{Sin.} \, 73° \; 5'}{2 \, \text{Sin.} \, 62° \; 24' \, . \, \text{Sin.} \, 44° \; 31'} = 28186{,}38 \, \square'.$$

Zweyt. Beysp. Für $\alpha = 37° \; 18'$, $\delta = 52° \; 42'$, $a = 350'$, $h = 34'$, ist $q = 10700{,}95 \, \square'$.

§ 37.

Aufg. In einem Vierecke sind drey auf einander folgende Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll den Inhalt des Vierecks finden.

Aufl. In dem Vierecke ABCD (Fig. 43) sind die drey Seiten CB $= a$, BA $= b$, AD $= c$, und die Winkel DAB $= \alpha$, ABC $= \beta$, gegeben. Man verlängere die Seiten AD, BC, bis solche in E zusammen stoßen.

1) In dem Dreyecke ABE, sind die Winkel DAB, ABC, und die Seite AB gegeben; man hat daher:

$$\text{BE} = \frac{b \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}, \quad \text{AE} = \frac{b \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\alpha + \beta)}$$

$$\triangle \text{ABE} = \frac{b^2 \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta}{2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta)} \quad (\S \; 27).$$

2) Hieraus erhält man,

$$CE = BE - BC = \frac{b\,\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - a$$

$$DF = AE - AD = \frac{b\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - c$$

und daher

$$\triangle CDE = \tfrac{1}{2}\left[\frac{b\,\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)} - a\right]\left[\frac{b\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha+\beta)} - c\right]\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)$$

(§ 26).

3) Folglich Trap. ABCD $= \triangle ABE - \triangle CDE =$ $\frac{1}{2}$ [ab Sin. β + bc Sin. α — ac Sin. $(\alpha+\beta)$].

Zus. Ist AD der BC parallel, so hat man $\alpha + \beta = 180^\circ$, und Sin. β = Sin. α, Sin. $(\alpha+\beta) = 0$; daher

Trap. ABCD $= \frac{1}{2}$b (a + c) Sin. α.

Beysp. Es sey a $= 287',3$, b $= 205'$, c $= 167',4$, $\alpha = 75^\circ\ 13'$, $\beta = 49^\circ\ 36'$. Hier findet man $\frac{1}{2}$ ab Sin. β $= 22425,96$; $\frac{1}{2}$ bc Sin. α $= 16590,51$; $\frac{1}{2}$ ac Sin. $(\alpha+\beta)$ $= 19742,19$; daher Trap. ABCD $= 19274,28$ □'.

§ 38.

Aufg. Den Inhalt eines regulären Vielecks, aus der Anzahl seiner Seiten und dem Halbmesser des um, oder in ihm beschriebenen Kreises, zu finden.

Aufl. Es sey AB (Fig. 46) die Seite eines regulären Vielecks von n Seiten, der Halbmesser des um ihm beschriebenen Kreises CA = CB = r, der Halbmesser des in ihm beschriebenen Kreises CN = ϱ, und der Inhalt des Vielecks = P.

1) Da das Vieleck n Seiten hat, so ist der Winkel ACB $= \frac{360^\circ}{n}$, und daher (§ 26),

$$\triangle ACB = \tfrac{1}{2} r^2\ \text{Sin.}\ \frac{360^\circ}{n}$$

folglich $P = \frac{1}{2} nr^2 \text{ Sin. } \frac{360^\circ}{n}$.

2) Da $ACB = \frac{360^\circ}{n}$, so ist $ACN = \frac{1}{2} ACB = \frac{180^\circ}{n}$,

$AN = \varrho \text{ Tang. } \frac{180^\circ}{n}$, $AB = 2 AN = 2 \varrho \text{ Tang. } \frac{180^\circ}{n}$; daher,

$$\triangle ACB = \varrho^2 \text{ Tang. } \frac{180^\circ}{n}$$

$$P = n\varrho^2 \text{ Tang. } \frac{180^\circ}{n}.$$

Erst. Beysp. Wie groß ist der Inhalt eines Neunecks, wenn der Halbmesser des um ihm beschriebenen Kreises 5″ 8‴ ist? Antw. 97,3052 □″.

Zweyt. Beysp. Wie groß ist der Inhalt eines Funfzehnecks, wenn der Halbmesser des in ihm beschriebenen Kreises 9″ ist? Antw. 252,6127 □″ oder 2,526127 □′.

IV. Theilung der Figuren durch Rechnung.

§ 39.

Aufg. Ein Dreyeck, aus einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Gesetzt das Dreyeck ABC (Fig. 47) sollte aus dem Punkte D durch eine Linie DE so getheilt werden, daß das Ganze sich zum abgeschnittenen Theile DBE wie m : n verhalte. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = d$.

1) Wüßte man den Punkt E zu bestimmen, so könnte man die Linie DE ziehen. Es sey daher $BE = x$. Nach § 26. Zus. 1, ist,

$$\triangle ABC : \triangle BDE = AB \, . \, BC : BD \, . \, BE,$$

oder $$m : n = ab : dx,$$

daher $$x = \frac{nab}{md}$$

2) Wird bey der Berechnung dieses Ausdruckes BE größer als BC gefunden, so ist dieses ein Zeichen, daß die Theilungslinie die Seite BC nicht treffen kann. Es sey daher DF die Theilungslinie und AF = y; so ist wieder nach § 26. Zus. 1.

$$\triangle ABC : \triangle ADF = AB \, . \, AC : AD \, . \, AF$$
$$= ac : (a-d)y$$

Vermöge der Voraussetzung soll aber seyn,

$$\triangle ABC : BDFC = m : n$$

und daher $$\triangle ABC : \triangle ADF = m : m-n$$

folglich ist $$m : m-n = ac : (a-d)y$$

und $$y = \frac{(m-n)ac}{m(a-d)}$$

Erst. Beysp. Es sey AB = 74′, BC = 47′, AC = 68′, BD = 19′ 3″: man soll aus dem Punkte D, durch eine Linie DE von dem Dreyecke ABC, und zwar von B gegen C, ein Stück abschneiden, welches sich zum Ganzen wie 7 zu 48 verhält. Hier fällt der Punkt E auf BC, und zwar ist BE = 26′,2802.

Zweyt. Beysp. Sollte aber von dem nämlichen Dreyecke der dritte Theil abgeschnitten werden, so fällt der Theilungspunkt auf die Linie AC, und zwar muß AF = 61′,3284 genommen werden.

§ 40.

Aufg. Ein Dreyeck durch eine Linie, welche einer seiner Seiten parallel läuft, nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Das Dreyeck ABC (Fig. 48) soll durch eine

Linie DE, welche der AC parallel läuft, so getheilt werden, daß sich solches zum abgeschnittenen Stücke DBE, wie m zu n verhalte.

Da alles darauf ankommt, den Punkt D oder E zu bestimmen, von wo aus die Linie DE gezogen werden muß, so sey AB = a, BD = x.

1) Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABC, DBE, ist,

$$\triangle ABC : \triangle DBE = AB^2 : BD^2$$

oder $$m : n = a^2 : x^2$$

folglich $$x = \sqrt{\frac{na^2}{m}} = a\sqrt{\frac{n}{m}}$$

2) Eben so findet man, wenn BC = b, BE = y gesetzt wird,

$$y = b\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Erst. Beysp. Von dem Dreyecke ABC, soll durch die Parallellinie DE der fünfte Theil abgeschnitten werden; die Linie AB mißt 739 Theile eines gewissen Maaßstabes: wie viele dieser Theile müssen um den Punkt D zu bestimmen, von B nach D getragen werden? Antw. $330\frac{1}{2}$ beynahe.

Zweyt. Beysp. Von einem Stück Feld, welches die Figur eines Dreyecks ABC hat, und welches 14356 □' enthält, soll durch eine Parallellinie DE ein Stück von 3958 □' abgeschnitten werden. Wenn nun die Seite AB = 573': wie groß muß BD genommen werden? Antw. 300',867.

§ 41.

Aufg. Von einem Vierecke mit zwey parallelen Seiten, durch eine diesen Seiten parallele Linie, ein Stück von gegebenem Flächeninhalte abzuschneiden.

Aufl. ABCD (Fig. 49) sey das Trapez mit zwey parallelen Seiten AD, BC, von welchem, durch eine Linie EF,

jenen parallel, ein Stück BCFE abgeschnitten werden soll, dessen Inhalt = q.

1) Man ziehe das Perpendikel BH, und BG der CD parallel, und es sey AD = a, BC = b, die Höhe BH = h. Wüßte man den Punkt K zu bestimmen, in welchem die Linien BH, EF sich schneiden, so könnte man die Theilungslinie ziehen. Es sey daher BK = x, EF = y.

2) Da EI der AG parallel, so ist,

$$AG : EI = BG : BI = BH : BK$$

oder $$a - b : y - b = h : x$$

also $$(a-b)x = (y-b)h$$

3) Trap. BCFE $= \frac{1}{2}(y+b)x = q$

also $$(y+b)x = 2q.$$

4) Die beyden Gleichungen 2) und 3) geben demnach, wenn sie aufgelöst werden:

$$y = \sqrt{\left[\frac{2q(a-b)}{h} + b^2\right]}$$

$$x = \frac{h}{a-b}\left[-b + \sqrt{\left(\frac{2q(a-b)}{h} + b^2\right)}\right]$$

Beysp. Es sey a = 76′, b = 36′, h = 23′, und daher der Inhalt des Trapezes = 1288 □′; man soll von demselben ein Stück von 560 □′ abschneiden: wie groß wird die Theilungslinie EF und ihre Entfernung von BC seyn? Antw. EF = 56′,954, und BK = 12′,048.

§ 42.

Aufg. Ein Trapez mit zwey parallelen Seiten, aus einem gegebenen Punkte auf einer dieser Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. ABCD (Fig. 50) sey das Trapez, welches von T aus durch eine Linie TE so getheilt werden soll, daß sich der abgeschnittene Theil ABET zum ganzen Trapez wie n zu

m verhalte. Es sey AD $=$ a, BC $=$ b, AB $=$ c, CD $=$ d, AT $=$ f.

1) Man setze BE $=$ x; so ist, wegen der gleichen Höhe, nach § 25 Anmerk.

$$\text{Trap. ABCD : Trap. ABET} = a+b : f+x;$$

aber $\text{Trap. ABCD : Trap. ABET} = m : n$

folglich $a+b : f+x = m : n$

daher $x = \frac{n(a+b)}{m} - f.$

2) Wird x bey der Berechnung negativ gefunden, so ist dies ein Zeichen, daß der Punkt E nicht mehr auf BC, sondern auf AB fällt. Es sey alsdann TF die Theilungslinie, und AF $=$ y. Man ziehe BT: so ist

$$\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{ATB} = a+b : f$$

und $\triangle \text{ATB} : \triangle \text{ATF} = c : y$

folglich $\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{ATF} = c(a+b) : fy.$

Aber $\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{ATF} = m : n$

folglich $c(a+b) : fy = m : n$

daher $y = \frac{nc(a+b)}{mf}.$

3) Wird in (1) x größer als b gefunden, so ist dies ein Zeichen, daß der Theilungspunkt auf CD fallen muß. Es sey daher TG die Theilungslinie, und DG $=$ z. Man ziehe CT: so ist,

$$\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{CTD} = a+b : a-f$$

und $\triangle \text{CTD} : \triangle \text{GTD} = d : z$

folglich $\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{GTD} = d(a+b) : (a-f)z.$

Vermöge der Voraussetzung ist aber,

$$\text{Trap. ABCD : ABCGT} = m : n$$

und daher $\text{Trap. ABCD} : \triangle \text{GTD} = m : m-n.$

Man hat also

$$d(a+b) : (a-f)z = m : m-n$$

und $$z = \frac{(m-n)(a+b)d}{m(a-f)}$$

Beysp. Es sey $a = 112'$, $b = 80'$, $c = 45'$, $d = 40'$, $f = 30'$. Sollte man nun von dem Trapez den dritten Theil abschneiden; so nehme man BE $= x = 34'$, und ziehe TE. Sollte man den zehnten Theil abschneiden, so nehme man AF $= y = 28',8$ und ziehe TF; sollte man aber $\frac{2}{7}$ des Trapezes abschneiden, so nehme man DG $= z = 35',122$ ungefähr, und ziehe TG.

§ 43.

Aufg. Ein Trapez mit zwey parallelen Seiten, aus einem gegebenen Punkte der nicht parallelen Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 51) das Trapez; AD, BC, die parallelen Seiten, und T der Punkt, von welchem die Theilungslinie ausgehen soll.

Man berechne zuerst die Dreyecke ATD, CTD, BTC, im Verhältniß zum Trapez; so wird sich aus der Größe dieser Dreyecke und aus der Größe des abzuschneidenden Stückes, leicht beurtheilen lassen, ob der Punkt E der Theilungslinie TE, auf AD, oder CD, oder BC fällt. Es sey zu dem Ende, AD $= a$, BC $= b$, TA $= c$, TB $= d$, der Inhalt des Trapez $= A$.

1) Ziehet man die Linien AC, BD; so findet man durch Schlüsse wie im vorigen §,

$$\triangle ATD = \frac{ac}{(a+b)(c+d)} \cdot A$$

$$\triangle BTC = \frac{bd}{(a+b)(c+d)} \cdot A$$

$$\triangle CTD = \text{Trap. ABCD} - \triangle ATD - \triangle BTC$$

$$= \frac{ad+bc}{(a+b)(c+d)} \cdot A$$

2) Soll nun von dem Trapez ein bestimmter Theil abgeschnitten werden, so kommt alles bloß darauf an, eines dieser Dreyecke aus seiner Spitze T nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, welches nach § 10 dadurch geschiehet, daß man die Grundlinie desselben nach diesem Verhältnisse theilet. Das folgende Beyspiel wird dies erläutern.

Beysp. Es sey a = 120′, b = 98′, c = 46′, d = 31′: so ist △ATD = 0,3288.A, △BTC = 0,1810.A, △CTD = 0,4902.A. Sollte nun der vierte Theil des Trapezes, oder ¼A = 0,25.A abgeschnitten werden, so muß man AD in E so theilen, daß AD : AE = 3288 : 2500, und alsdann wird, wenn man TE ziehet, TAE der vierte Theil seyn. Sollte man ⅔ des Trapez, oder ⅔A = 0,6666.A abschneiden, so muß man zu ATD noch ein Dreyeck DTF = 0,3378.A hinzusetzen, und folglich DC in F so theilen, daß DC : DF = 4902 : 3378; alsdann wird ATFD der verlangte Theil seyn. Sollte man den 8/9 Theil, oder 8/9 A = 0,8888.A abschneiden, so muß man, weil △ATD + △DTC = 0,8190.A, zum Vierecke ATCD noch ein Dreyeck CTG = 0,0698.A hinzusetzen, und folglich BC in G so theilen, daß BC : CG = 1810 : 698; alsdann wird ATGCD der verlangte Theil seyn.

§ 44.

Aufg. Ein jedes Trapez, aus einem bestimmten Punkte, nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 52) das gegebene Trapez, und T der Punkt, von wo aus die Theilungslinie TE so gezogen werden soll, daß Trap. ABCD : Trap. DCET = m : n sey.

1) Man verlängere die Seiten BC, AD, bis sie in Z zusammenstoßen. Da das Trapez ABCD gegeben ist, so lassen

sich

Winkel gemessen, welche die Gesichtslinien mit einander machen; die Entfernung des ersten Objekts vom zweyten, desgleichen die des dritten vom vierten sind gegeben: man sucht die Entfernung des zweyten vom dritten.

Aufl. Die vier Objekte mögen A, B, C, D, (Fig. 72) seyn; E sey der Standpunkt, aus welchem sie gesehen, und die Winkel AEB $= \alpha$, BEC $= \beta$, CED $= \gamma$, gemessen worden sind; die Entfernungen AB $= a$, CD $= b$, sind gegeben: man sucht BC. Es sey BC $= x$.

1) Das Dreyeck AEB giebt,

$$\text{Sin. ABE} = \frac{\text{AE Sin. } \alpha}{a},$$

und das Dreyeck BED, worin BED $= \beta + \gamma$, BD $= b + x$

$$\text{Sin. DBE} = \frac{\text{ED Sin. } (\beta + \gamma)}{b + x}.$$

Da nun Sin. ABE $=$ Sin. DBE: so ist,

$$\frac{\text{AE Sin. } \alpha}{a} = \frac{\text{ED Sin. } (\beta + \gamma)}{b + x},$$

und daher $\frac{\text{ED}}{\text{AE}} = \frac{(b + x) \text{ Sin. } \alpha}{a \text{ Sin. } (\beta + \gamma)}$

2) Das Dreyeck ACE, worin AEC $= \alpha + \beta$, AC $= a + x$, giebt,

$$\text{Sin. ACE} = \frac{\text{AE Sin. } (\alpha + \beta)}{a + x}$$

und das Dreyeck ECD,

$$\text{Sin. DCE} = \frac{\text{ED Sin. } \gamma}{b}.$$

Da nun Sin. ACE $=$ Sin. DCE: so ist,

$$\frac{\text{AE Sin. } (\alpha + \beta)}{a + x} = \frac{\text{ED Sin. } \gamma}{b},$$

und daher $\frac{\text{ED}}{\text{AE}} = \frac{b \text{ Sin. } (\alpha + \beta)}{(a + x) \text{ Sin. } \gamma}.$

2) Werden die beyden in 1) und 2) gefundenen Ausdrücke für $\frac{ED}{AE}$ einander gleich gesetzt: so erhält man,

$$(a+x)(b+x) = \frac{ab \operatorname{Sin.}(\alpha+\beta) \operatorname{Sin.}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Sin.}\gamma}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt,

$$x = \sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{ab \operatorname{Sin.}(\alpha+\beta) \operatorname{Sin.}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Sin.}\gamma}\right]} - \frac{a+b}{2}.$$

4) Zur Abkürzung der Rechnung, gebe man dem ersten Theile dieses Ausdruckes folgende Form:

$$\frac{a-b}{2}\sqrt{\left[1 + \frac{4\, ab \operatorname{Sin.}(\alpha+\beta) \operatorname{Sin.}(\beta+\gamma)}{(a-b)^2 \operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Sin.}\gamma}\right]}.$$

Man setze nun,

$$\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{ab \operatorname{Sin.}(\alpha+\beta) \operatorname{Sin.}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Sin.}\gamma}} = \operatorname{Tang.}\varphi;$$

d. h. man suche einen Winkel φ, von solcher Beschaffenheit, daß die Tangente desselben jenem Ausdrucke zur Linken gleich sey: alsdann hat man,

$$x = \frac{a-b}{2}\sqrt{(1+\operatorname{Tang.}\varphi^2)} - \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{a-b}{2} \operatorname{Sec.}\varphi - \frac{a+b}{2}.$$

Beysp. Es sey $a = 2731'$, $b = 1987'$, $\alpha = 19^\circ\ 7'$, $\beta = 31^\circ\ 5'$, $\gamma = 14^\circ\ 57'$. Hier ist,

$$\log.\frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{ab \operatorname{Sin.}(\alpha+\beta) \operatorname{Sin.}(\beta+\gamma)}{\operatorname{Sin.}\alpha \operatorname{Sin.}\gamma}} = 1{,}2046761,$$

folglich $\log. \operatorname{Tang.}\varphi = 11{,}2046761$

$\varphi = 86^\circ\ 25'\ 41'',63,$

und daher $x = 3612',2.$

Der Winkel φ mußte hier sehr genau berechnet werden, wenn man nicht einen bedeutenden Fehler begehen wollte. Hätte

man z. B. die 0,63″ weggelassen: so würde man für x nur 3611′,9 bekommen haben.

Anmerk. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe giebt Lambert (Beytr. zur reinen und angew. Mathem. I. S. 208), welche aber auf eine schwer zu berechnende Formel führt. Die meinige stimmt im Wesentlichen mit der überein, welche der Hr. Hauptmann Rohde, als Anhang zu einem Memoire über einen andern Gegenstand, der Berliner Akademie der Wissenschaften übergeben hat. (Memoire sur un endroit etc. Potsdam chez Horvath, 1804.)

§ 56.

Die scheinbaren Entfernungen dreyer Oerter von einander, aus drey verschiedenen Standpunkten gesehen, sind gegeben; desgleichen die scheinbaren Entfernungen der drey Standpunkte aus einem der drey Oerter gesehen: man soll die Lage dieser sechs Punkte gegen einander bestimmen, vorausgesetzt, daß sie alle in Einer Ebene liegen.

Aufl. A, B, C (Fig. 73), mögen die drey Oerter seyn, welche aus den drey Standpunkten D, E, F, gesehen werden; die Winkel ADB $= \alpha$, BDC $= \beta$, AEB $= \gamma$, BEC $= \delta$, AFB $= \varepsilon$, BFC $= \zeta$, wie auch die Winkel DAE $= \varkappa$, EAF $= \lambda$, sind gegeben, oder gemessen worden: man soll die Lage der sechs Punkte A, B, C, D, E, F, bestimmen.

1) Aus den gegebenen Winkeln lassen sich die Winkel DCE, ECF, bestimmen. Denn da in jedem Dreyecke die Summe aller Winkel gleich groß ist: so giebt die bloße Ansicht der Figur DCE $= \varkappa + \alpha + \beta - \gamma - \delta$, ECF $= \lambda + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta$. Da also diese Winkel bekannt sind, so setze man der Kürze wegen, DCE $= \mu$, ECF $= \nu$. Wären nun noch die Winkel EAB, ECB, bekannt: so hätte man alle Winkel der Figur, und folglich auch die Lage der sechs Punkte. Es sey daher EAB $= \varphi$, ECB $= \psi$.

2) Da DAB $= \varphi + \varkappa$, DCB $= \psi - \mu$: so hat man im Dreyecke DAB,

$$BD = \frac{AB \text{ Sin. } (\varphi + \varkappa)}{\text{Sin. } \alpha}$$

und im Dreyecke BCD,

$$BD = \frac{BC \text{ Sin. } (\psi - \mu)}{\text{Sin. } \beta}.$$

Diese beyden Ausdrücke für BD einander gleich gesetzt, geben,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\psi - \mu)}{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\varphi + \varkappa)}.$$

3) Eben so erhält man aus den beyden Dreyecken EAB, ECB,

$$BE = \frac{AB \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } \gamma}, \quad BE = \frac{BC \text{ Sin. } \psi}{\text{Sin. } \delta},$$

und daher $$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } \psi}{\text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi}.$$

4) Ferner aus den beyden Dreyecken FAB, FCB, worin FAB $= \varphi - \lambda$, FCB $= \psi + \nu$,

$$BF = \frac{AB \text{ Sin. } (\varphi - \lambda)}{\text{Sin. } \varepsilon}, \quad BF = \frac{BC \text{ Sin. } (\psi + \nu)}{\text{Sin. } \zeta},$$

und daher $$\frac{AB}{BC} = \frac{\text{Sin. } \varepsilon \text{ Sin. } (\psi + \nu)}{\text{Sin. } \zeta \text{ Sin. } (\varphi - \lambda)}.$$

5) Setzt man die in 2, 3, 4, für $\frac{AB}{BC}$ gefundenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man,

$$\frac{\text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } \psi}{\text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi} = \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\psi - \mu)}{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\varphi + \varkappa)}$$

$$\frac{\text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } \psi}{\text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \varphi} = \frac{\text{Sin. } \varepsilon \text{ Sin. } (\psi + \nu)}{\text{Sin. } \zeta \text{ Sin. } (\varphi - \lambda)}.$$

Diese Gleichungen geben, wenn man Sin. $(\psi - \mu)$, Sin. $(\varphi + \varkappa)$, Sin. $(\psi + \nu)$, Sin. $(\varphi - \lambda)$ entwickelt (§. 9), und über das Kreuz multiplicirt,

$$\text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\psi\ (\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\varkappa + \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\varkappa)$$
$$= \text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varphi\ (\text{Sin.}\,\psi\ \text{Cos.}\,\mu - \text{Cos.}\,\psi\ \text{Sin.}\,\mu)$$

$$\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\zeta\ \text{Sin.}\,\psi\ (\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,\lambda - \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\lambda)$$
$$= \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ \text{Sin.}\,\varphi\ (\text{Sin.}\,\psi\ \text{Cos.}\,\nu + \text{Cos}\,\psi\ \text{Sin.}\,\nu).$$

Wird jede dieser Gleichungen durch $\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\psi$ dividirt: so kommt,

$$\text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma\ (\text{Cos.}\,\varkappa + \text{Cot.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\varkappa)$$
$$= \text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\delta\ (\text{Cos.}\,\mu - \text{Cot.}\,\psi\ \text{Sin.}\,\mu)$$

$$\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\zeta\ (\text{Cos.}\,\lambda - \text{Cot.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\lambda)$$
$$= \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ (\text{Cos.}\,\nu + \text{Cot.}\,\psi\ \text{Sin.}\,\nu).$$

6) Die erste von den beyden zuletzt gefundenen Gleichungen giebt,

$$\text{Cot.}\,\psi = \frac{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\delta\ \text{Cos.}\,\mu - \text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma\ (\text{Cos.}\,\varkappa + \text{Cot.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\varkappa)}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\mu}$$

und die zweyte,

$$\text{Cot.}\,\psi = \frac{\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\zeta\ (\text{Cos.}\,\lambda - \text{Cot.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\lambda) - \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ \text{Cos.}\,\nu}{\text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ \text{Sin.}\,\nu}$$

Werden diese beyden Ausdrücke einander gleich gesetzt, und $\text{Cot.}\,\varphi$ heraus gezogen: so erhält man,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\delta\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ (\text{Sin.}\,\nu\ \text{Cos}\,\mu + \text{Sin.}\,\mu\ \text{Cos.}\,\nu) - \\ \text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ \text{Sin.}\,\nu\ \text{Cos.}\,\varkappa - \text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\zeta\ \text{Sin.}\,\mu\ \text{Cos.}\,\lambda\end{array}\right]}{\text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\varepsilon\ \text{Sin.}\,\nu\ \text{Sin.}\,\varkappa - \text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\zeta\ \text{Sin.}\,\lambda\ \text{Sin.}\,\mu}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $\text{Sin.}\,\gamma$ dividirt, und $\text{Sin.}\,(\mu + \nu)$ für $\text{Sin.}\,\nu\ \text{Cos.}\,\mu + \text{Sin.}\,\mu\ \text{Cos.}\,\nu$, und $\text{Cosec.}\,\gamma$ für $\frac{1}{\text{Sin.}\,\gamma}$ (§. 4) setzt,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\text{Cosec.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,(\mu+\nu) - \\ \text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,\nu\,\text{Cos.}\,\varkappa - \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\mu\,\text{Cos.}\,\lambda\end{array}\right]}{\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,\nu\,\text{Sin.}\,\varkappa - \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\lambda\,\text{Sin.}\,\mu}$$

7) Um Cot. ψ zu bestimmen, dürfte man nur aus den beyden in 5) zuletzt gefundenen Gleichungen Cot. φ eliminiren; man erreicht aber seinen Endzweck weit leichter, wenn man in dem für Cot. φ gefundenen Ausdrucke für die Winkel

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,$$

respektive die Winkel

$$\zeta,\ \varepsilon,\ \delta,\ \gamma,\ \beta,\ \alpha,\ \nu,\ \mu,\ \lambda,\ \varkappa,$$

setzt; indem die letzteren in Ansehung des Winkels ψ eben die Lage haben, als die ersteren in Ansehung des Winkels φ. Durch diese Substitution erhält man,

$$\text{Cot.}\,\psi = \frac{\left[\begin{array}{l}\text{Cosec.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,(\lambda+\varkappa) - \\ \text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\varkappa\,\text{Cos.}\,\nu - \text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\lambda\,\text{Cos.}\,\mu\end{array}\right]}{\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\varkappa\,\text{Sin.}\,\nu - \text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\mu\,\text{Sin.}\,\lambda}$$

in welchem Ausdrucke der Nenner derselbe ist, als in dem für Cot. φ.

In diesen beyden Ausdrücken für Cot. φ, Cot. ψ, ist: $\mu = \varkappa + \alpha + \beta - \gamma - \delta$, $\nu = \lambda + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta$; also $\mu + \nu = \varkappa + \lambda + \alpha + \beta - \varepsilon - \zeta$.

Beysp. Es sey $\alpha = 40^\circ\ 36'$, $\beta = 27^\circ\ 9'$, $\gamma = 36^\circ\ 49'$, $\delta = 31^\circ\ 18'$, $\varepsilon = 22^\circ$, $\zeta = 13^\circ\ 28'$, $\varkappa = 25^\circ\ 23'$, $\lambda = 20^\circ\ 17'$; daher $\mu = 25^\circ\ 1'$, $\nu = 52^\circ\ 56'$. Hier ist

$\text{Cosec.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \delta\ \text{Sin.}\ \varepsilon\ \text{Sin.}\ (\mu + \nu) = 0{,}20668928$

$\text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \varepsilon\ \text{Sin.}\ \nu\ \text{Cos.}\ \varkappa = 0{,}12323178$

$\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \zeta\ \text{Sin.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \lambda = 0{,}06011447$

$\text{Cosec.}\ \delta\ \text{Sin.}\ \zeta\ \text{Sin.}\ \gamma\ \text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ (\lambda + \varkappa) = 0{,}08767862$

$\text{Sin.}\ \varepsilon\ \text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \varkappa\ \text{Cos.}\ \nu = 0{,}04416768$

$\text{Sin.}\ \zeta\ \text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \lambda\ \text{Cos.}\ \mu = 0{,}04760865$

$\text{Sin.}\ \beta\ \text{Sin.}\ \varepsilon\ \text{Sin.}\ \nu\ \text{Sin.}\ \varkappa = 0{,}05847082$

$\text{Sin.}\ \alpha\ \text{Sin.}\ \zeta\ \text{Sin.}\ \lambda\ \text{Sin.}\ \mu = 0{,}02221714$

Daher ist,

$$\text{Cot.}\ \varphi = \frac{0{,}02334303}{0{,}03625368} = 0{,}6438802$$

$$\text{Cot.}\ \psi = \frac{-0{,}00409771}{0{,}03625368} = -0{,}1130288$$

folglich $\varphi = 57^\circ\ 13'\ 24''$, $\psi = 96^\circ\ 26'\ 55''$.

Nachdem die Winkel φ und ψ gefunden worden, ist es leicht die Punkte A, B, C, D, E, F, zu Papier zu bringen, wie auch die Entfernungen aller dieser Punkte von einander zu berechnen, wenn nur eine dieser Entfernungen, es sey welche es wolle, entweder unmittelbar gemessen worden, oder außerdem schon bekannt ist.

Zus. Wenn auch die Standpunkte D, E, F, eine andere Lage haben, als in Fig. 73 angenommen worden: so bleiben die für Cot. φ, Cot. ψ, gefundenen Formeln dennoch richtig, wenn man nur den Winkeln α, β, γ, δ, rc. die der jedesmaligen Lage entsprechenden Werthe giebt. Wie man sich hierbey zu verhalten habe, kann am besten durch ein Beyspiel gezeigt werden.

Gesetzt, man hätte den ersten Standpunkt in D′ anstatt in D genommen, und man wollte die von der Lage dieses Punktes abhängenden Werthe von α, β, $\varkappa$, bestimmen: so stelle man sich vor, der Punkt D sey durch ein allmähliches Fort-

rücken nach D′ gekommen. So wie nun der Punkt D nach D′ fortrückt, und sich der Linie AB nähert, wird der Winkel ADB = α immer größer, bis dieser Punkt in AB selbst fällt, und α = 180° wird. Rückt der Punkt D über die Linie AB hinaus; so wird aus dem konkaven Winkel ein konvexer, und man muß demnach, wenn der Punkt D in D′ angenommen wird, unter α, nicht den konkaven, sondern den konvexen Winkel AD′B verstehen. Will man aber, wie es in den meisten Fällen rathsam ist, den konvexen Winkel vermeiden: so kann man den Uebergang des Punktes von D nach D′, durch die Verlängerung von AB, etwa nach der Seite von A zu, geschehen lassen. Bey dieser Voraussetzung wird der Winkel α immer kleiner, indem sich die Linien DB, DA, immer mehr näheren, wird = 0, wenn der Punkt D in die Verlängerung von BA zu liegen kommt, und die Linien DB, DA, zusammen fallen, und endlich negativ, wenn der Punkt D über AB hinaus rückt, und die Linie BD, die vorher diesseits der Linie DA lag, nun jenseits derselben fällt. Will man daher den konkaven Winkel AD′B brauchen: so muß man α = — AD′B setzen.

Eben so verhält es sich mit dem Winkel β. So lange nämlich der Punkt D unterhalb der Linie BC, oder ihrer Verlängerung, und daher die Linie DC diesseits der Linie DB liegt, ist er positiv; sobald er aber über die Linie BC hinaus rückt, und daher die Linie DC jenseits der Linie DB fällt, wird er negativ. Also ist z. B. für den Punkt D′, β = — BD′C.

Der Winkel ϰ ist positiv, so lange er unter AE liegt, wird aber negativ, so bald die Linie AD jenseits der Linie AE zu liegen kommt. Also ist z. B. für den Punkt D′, ϰ = — EAD′.

Was übrigens die trigonometrischen Linien der negativen Winkel anbetrifft, so ist, wie bekannt, wenn θ irgend einen Winkel bezeichnet, $\text{Sin.} -\theta = -\text{Sin.}\ \theta$, $\text{Cos.} -\theta = \text{Cos.}\ \theta$, $\text{Tang.} -\theta = -\text{Tang.}\ \theta$, $\text{Cot.} -\theta = -\text{Cot.}\ \theta$, $\text{Sec.} -\theta = \text{Sec.}\ \theta$, $\text{Cosec.} -\theta = -\text{Cosec.}\ \theta$. Rechnungen mit solchen Winkeln werden in der Folge häufig genug vorkommen.

Anmerk. Die hier aufgelöste Lambertsche Aufgabe ist in der Ausübung von großem Nutzen, weil man dadurch auf einmal die Lage von sechs Punkten erhält; man findet sie in seinen Beyträgen, I. S. 72. Die daselbst (S. 82) gegebene Formel für Cot. x, oder das meinige Cot. ζ, ist aber nicht ganz richtig, indem sowohl im Zähler, als im Nenner derselben, aus Versehen ein Faktor ausgelassen worden ist. Der Fehler wurde zuerst von Good entdeckt (Lambert's gel. Briefw. 2ter Band, S. 232), und von Lambert (Ebendas. S. 236) anerkannt.

VI. Kreisrechnungen.

§ 57.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises den Umfang und Inhalt desselben zu berechnen.

Aufl. Wenn der Halbmesser eines Kreises $= r$, der Umfang desselben $= p$, und der Inhalt $= q$ gesetzt wird; so ist, wie bekannt,

$$p = 2\pi r, \quad q = \pi r^2;$$

oder, wenn der Durchmesser $= d$ ist,

$$p = \pi d, \quad q = \tfrac{1}{4}\pi d^2;$$

wo π die Zahl ist, welche den Umfang eines Kreises angiebt, dessen Durchmesser $= 1$ ist. Diese Zahl ist,

$$3{,}14159265358979323846264338327950\ldots$$

So weit ist diese Zahl schon von Ludolph von Cölln berechnet worden. In Vega's großen und kleinen logarithmischen Tafeln, findet man diese Zahl vom Verfasser bis auf 143 Decimalstellen berechnet. In den meisten Fällen der Ausübung aber, ist es schon hinlänglich, wenn man nur die ersten fünf Decimalstellen braucht, und also $\pi = 3{,}14159$ setzt.

Durch die Verwandlung dieser Zahl in einen kontinuirlichen Bruch erhält man folgende verkürzte Werthe:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \text{u. s. w.}$$

Lambert hat in seinen Beyträgen II. S. 156 und 157, 27 solche Werthe berechnet; die beyden letzten aber sind unrichtig, wie der Hr. Prof. Schulz gefunden hat. (Entw. einig. der wichtigsten Mathemat. Theorien, Königsb. 1803. S. 159.)

In der Ausübung kann man da, wo es nicht um große Genauigkeit zu thun ist, $\pi = \frac{355}{113}$ setzen, weil diese Zahl von der Ludolphschen erst in der siebenten Decimalstelle abweicht: denn es ist $\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$

Will man mit Logarithmen rechnen: so ist,

$$\log.\ \pi = 0{,}49714987269413385435127\ldots$$

oder abgekürzt,

$$\log.\ \pi = 0{,}4971499.$$

Zus. Aus obigen beyden Gleichungen für p und q erhält man,

$$r = \frac{p}{2\pi},\ r = \sqrt{\frac{q}{\pi}},\ q = \frac{p^2}{4\pi},\ p = 2\sqrt{\pi q}.$$

Erstes Beyspiel. Der Durchmesser eines Kreises ist $42'\ 1''\ 2'''$: wie groß ist der Umfang und Inhalt desselben? Antw. Der Umfang $= 132'\ 3''\ 2'''$, und der Inhalt $= 1393\ \square'\ 37\ \square''\ 04\ \square'''$ ungefähr.

Zweyt. Beysp. Der Inhalt eines Kreises ist 3765 □′ 18□″: wie groß ist der Halbmesser und der Umfang desselben? Antw. Der Halbmesser = 34′ 6″ 2‴, und der Umfang = 217′ 5″ 2‴ ungefähr.

Einige hierher gehörige Uebungs-Aufgaben.

I. Es sind drey Kreise gegeben; der Durchmesser des ersten ist 9′ 7″, der Durchmesser des zweyten 13′ 6″, und der Durchmesser des dritten 22′ 9″: man soll einen Kreis finden, dessen Flächeninhalt so groß ist, als der jener drey Kreise zusammen genommen. Wie groß muß der Durchmesser desselben seyn? Antw. 28′ 3″ 4‴ ungefähr.

II. Aus irgend einem Punkte werden zwey koncentrische Kreise beschrieben; der Halbmesser des äußeren Kreises ist = 1′ 5″ 3‴, und der Halbmesser des inneren = 10″ 9‴: wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt so groß ist, als der Flächeninhalt des zwischen jenen beyden Kreisen enthaltenen Ringes? Antw. 10″ 7‴ 4^{IV} beynahe.

III. Der Halbmesser eines Kreises ist 39′ 8″: es soll um denselben ein anderer, koncentrischer Kreis beschrieben werden, daß der zwischen beyden Kreisen enthaltene Ring einen Flächeninhalt von 385 □′ habe. Wie groß muß der Halbmesser desselben seyn? Antw. 41′ 3″ 1‴ ungefähr.

IV. Der Durchmesser eines Kreises ist 45′ 3″ 7‴: man soll den Durchmesser eines andern Kreises finden, dessen Flächeninhalt sich zum Flächeninhalte jenes Kreises wie 387 zu 932 verhalte. Wie groß ist dieser Durchmesser? Antw. 29′ 2″ 3‴ beynahe.

V. Es werden zwey Kreise gegeben; die Peripherie des einen ist 69′ 5″, und die des andern 35′ 9″: wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt so groß ist, als der jener beyden Kreise zusammen genommen? Antw. 24′ 8″ 9‴ ungefähr.

VI. Ein Kreis, dessen Durchmesser 9′ 7″ ist, soll in ein gleichseitiges Dreyeck verwandelt werden: wie groß wird die Seite dieses Dreyeckes seyn müssen? Antw. 13′ 0″ 6‴ ungefähr.

§ 58.

Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises, die Größe eines in Graden, Minuten und Sekunden ausgedrückten Bogens zu finden.

Aufl. Der Halbmesser des Kreises sey $= r$, die gegebene Anzahl der Grade eines Bogens $= \varphi$, die Länge dieses Bogens, durch die nämliche Einheit ausgedrückt, worin der Halbmesser gegeben ist, $= l$. Da der Umfang des ganzen, mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises, $= 2\pi r$: so ist,

$$360^\circ : \varphi = 2\pi r : l,$$

und daher
$$l = \frac{\pi r \varphi}{180^\circ}.$$

Enthält φ außer den Graden, auch noch Minuten und Sekunden; so muß man solches in Minuten oder Sekunden verwandeln, und die 180 im Nenner mit 60, oder mit $60 \cdot 60 = 3600$ multipliciren. Man kann auch, wenn man es für besser hält, die Minuten und Sekunden in Decimaltheile eines Grades verwandeln, und die 180 ungeändert lassen.

Zus. Aus dem für l gefundenen Ausdrucke, erhält man umgekehrt,

$$\varphi = \frac{180^\circ l}{\pi r},\ r = \frac{180^\circ l}{\pi \varphi}.$$

Erstes Beysp. Wie groß ist ein Bogen von 37° 19′, in einem Kreise, dessen Halbmesser 13′ 4″ ist? Antwort: 87′ 2″ 7‴ 4^{IV} ungefähr.

Zweyt. Beysp. Wie groß ist ein Bogen von 149° 16′ 13″,

in einem Kreise, dessen Halbmesser 19′ 7″ ist? Antwort: 51′ 3″ 2‴ 3ⁱᵛ ungefähr.

Dritt. Beysp. Wie groß ist ein Bogen von 253° 9′ 3″, in einem Kreise, dessen Halbmesser 23′ 8″ 6‴ ist? Antw. 105′ 4″ 2‴ 1ⁱᵛ ungefähr.

Viert. Beysp. Wie viel Grade, Minuten und Sekunden, hält ein Bogen, dessen Länge 25′ 7″ ist, wenn der Halbmesser des Kreises, zu welchem er gehört, = 19′ 3″ 7‴? Antw. 76° 1′ 11″ beynahe.

Fünft. Beysp. Wie groß muß der Halbmesser eines Kreises seyn, wenn ein Bogen von 25° 3′ 49″ eine Länge von 247′ 8″ hat? Antw. 566′ 4″ 7‴ 4ⁱᵛ ungefähr.

Sechst. Beysp. Man hat zwey Bogen von gleicher Länge, welche zu zwey verschiedenen Kreisen gehören; der eine hält 15° 39′ 7″, der andere 56° 9′ 43″; der erste gehört zu einem Kreise, dessen Halbmesser 7′ 6″ 3‴ ist: wie groß ist der Halbmesser des Kreises, zu welchem der andere Bogen gehört? Antw. 2′ 1″ 2‴ 6ⁱᵛ ungefähr.

§ 59.

Aufg. Aus dem gegebenen Winkel und dem Halbmesser eines Kreisausschnittes dessen Flächeninhalt zu finden.

Aufl. Es sey φ die Anzahl der Grade, Minuten und Sekunden, welche der Winkel, und folglich auch der Bogen des Ausschnittes enthält, l die Länge dieses Bogens, r der Halbmesser und q der Flächeninhalt des Ausschnittes: so ist nach dem vorigen §, $l = \frac{\pi r \varphi}{180^\circ}$.

Da nun jeder Kreisausschnitt einem Dreyecke gleich ist, welches den Bogen zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat: so ist,

$$q = \frac{lr}{2} = \frac{\pi r^2 \phi}{360^\circ}.$$

Zus. Hieraus erhält man,

$$\phi = \frac{360^\circ q}{\pi r^2}, \; r = \sqrt{\frac{360^\circ q}{\pi \phi}}.$$

Erst. Beysp. Der Halbmesser eines Kreises ist 7″ 9‴; der Winkel eines Ausschnittes desselben hält 37° 5′: wie groß ist der Flächeninhalt dieses Ausschnittes? Antw. 20 □″ 19 □‴ 67 □^{IV} ungefähr.

Zweyt. Beysp. Wie groß ist der Winkel eines Ausschnittes, dessen Halbmesser = 25783′, und dessen Inhalt = 935 □′ ist? Antw. 0,58023″ ungefähr.

Dritt. Beysp. Wie groß ist der Halbmesser eines Ausschnittes, dessen Winkel = 46° 25′ 18″, und dessen Flächeninhalt = 367 □′ 90 □″ ist? Antwort: 301′ 3″ 5‴ beynahe.

Einige hierher gehörige Uebungs-Aufgaben.

I. Der Flächeninhalt eines Ausschnittes ist dem Quadrate seines Halbmessers gleich: wie groß ist der Winkel desselben? Antw. 114° 35′ 29″ ungefähr.

II. Es giebt einen Ausschnitt, dessen Winkel = 69° 47″, und der die Eigenschaft hat, daß, wenn man den Halbmesser, Bogen und Flächeninhalt desselben, in der Ordnung, wie diese Dinge hier auf einander folgen, durch eine und dieselbe Längen- und Flächen-Einheit ausdrückt, die drey erhaltenen Zahlen in stetiger Proportion stehen: wie groß ist der Flächeninhalt dieses Ausschnittes, den Fuß zur Einheit angenommen? Antw. 13008 □′ 28 □″.

III. Man soll ein Dreyeck finden, dessen drey Seiten sich wie die Zahlen 11, 13, 20, verhalten, und dessen Flächenin-

halt so groß seyn, als der Flächeninhalt eines Ausschnittes, dessen Winkel 19° 27′ 5″ hält, und dessen Bogen 27′ 3″ lang ist. Wie groß werden die drey Seiten dieses Dreyecks seyn? Antw. Die eine Seite ist = 44′,8594, die andere = 53′,0157, und die dritte = 81′,5626.

§ 60.

Aufg. Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, aus dem in Graden, Minuten und Sekunden gegebenen Bogen und dem Halbmesser dieses Bogens, zu finden.

Aufl. Es sey ADB (Fig. 74) der in Graden, Minuten und Sekunden gegebene Bogen, $= \varphi$; C der Mittelpunkt und r der Halbmesser dieses Bogens: so ist nach dem vorigen §,

$$\text{Ausschnitt ACB} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ}.$$

Nun ist $\triangle ACB = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin}. \varphi$, (§ 26)

folglich

$$\text{Abschnitt ADBA} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin}. \varphi$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{\pi \varphi}{180^\circ} - \operatorname{Sin}. \varphi\right].$$

Erst. Beysp. Für $\varphi = 29^\circ\ 38'\ 15''$, $r = 37'$, ist Abschnitt ADBA = 15,5801 □′.

Zweyt. Beysp. Für $\varphi = 73^\circ\ 25'\ 11''$, $r = 65'$, ist Abschnitt ADBA = 682,3271 □′

§ 61.

Aufg. Aus der gegebenen Sehne und dem Halbmesser eines Kreisausschnittes den Flächenraum desselben zu finden.

Aufl. Es sey ACB (Fig. 74) der Ausschnitt, dessen Inhalt gesucht wird, der gegebene Halbmesser = r, die gegebene Sehne AB = a. Könnte man den Winkel ACB finden: so hätte man den Inhalt des Ausschnittes (§ 59).

Man setze ACB $= \varphi$: so ist, wenn man das Perpendikel Cc ziehet, ACc $= \frac{1}{2}\varphi$, Ae $= r \text{ Sin. } \frac{1}{2}\varphi$, AB $= a = 2r \text{ Sin. } \frac{1}{2}\varphi$; folglich,

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a}{2r},$$

woraus sich der Winkel φ bestimmen läßt. Hat man diesen Winkel gefunden: so ist,

$$\text{Ausschnitt ACB} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ}.$$

Zus. Ist die Sehne AB und der Winkel ACB gegeben: so erhält man den Inhalt des Ausschnittes ebenfalls aus § 59, wenn man für r seinen Werth $\frac{a}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}\varphi}$ in den daselbst gefundenen Ausdruck setzt. Es ist nämlich

$$\text{Ausschnitt ACB} = \frac{\pi a^2 \varphi}{1440^\circ \text{ Sin. } \frac{1}{2}\varphi^2};$$

welcher Ausdruck am leichtesten durch Logarithmen berechnet wird.

Erst. Beysp. Die Sehne eines Ausschnittes ist $= 23'$, Der Halbmesser $= 29'\ 7''$: wie groß ist der Inhalt desselben? Antw. 350 □′ 71 □″.

Zweyt. Beysp. Die Sehne eines Ausschnittes ist $= 54'$, der Winkel $= 67^\circ\ 15'\ 25''$: wie groß ist der Inhalt desselben? Antw. 1395 □′ 07 □″.

Anmerk. Ist die Sehne so groß als der Halbmesser: so ist der Inhalt des Ausschnittes $= \frac{1}{6}\pi r^2$, weil alsdann die Sehne eine Seite des, im Kreise, wozu der Ausschnict gehört, beschriebenen regulären Sechsecks ist. Wenn die Sehne $= r\sqrt{2}$: so ist der Ausschnitt ein Quadrant, und folglich der Inhalt desselben $= \frac{1}{4}\pi r^2$. Ist die Sehne $= r\sqrt{3}$: so ist solche die Seite eines im Kreise beschriebenen Dreyecks, und daher der Ausschnitt $= \frac{1}{3}\pi r^2$.

§ 62.

Aufg. Aus dem in Graden, Minuten und Sekunden gegebenen Bogen nebst seiner Sehne, den Flächenraum des Abschnittes zu finden, welcher von der Sehne und dem Bogen eingeschlossen wird.

Aufl. Nach dem vorigen § ist, wenn man die daselbst gebrauchten Bezeichnungen beybehält, (Fig. 74)

$$\text{Ausschnitt ACB} = \frac{\pi a^2 \varphi}{1440^\circ \text{Sin.} \frac{1}{2} \varphi^2}.$$

In dem Dreyecke ACB ist aber, $Cc = \frac{1}{2} a \text{ Cot.} \frac{1}{2} \varphi$, und folglich,

$$\triangle ACB = \frac{1}{4} a^2 \text{ Cot.} \frac{1}{2} \varphi;$$

man hat daher,

$$\text{[Abschnitt ABDA} = \frac{\pi a^2 \varphi}{1440^\circ \text{Sin.} \frac{1}{2} \varphi^2} - \frac{1}{4} a^2 \text{ Cot.} \frac{1}{2} \varphi.$$

Erst. Beys. Für $a = 18' 9'' 3'''$, $\varphi = 113^\circ 39' 25''$ ist Abschnitt ABDA $= 68{,}2624$ □'.

Zweyt. Beysp. Für $a = 126' 5'' 8'''$, $\varphi = 269^\circ 14' 7''$, ist Abschnitt ABDA $= 22527{,}207$ □'.

Anmerkung. In dem zweyten Beyspiele ist $\text{Cot.} \frac{1}{2} \varphi = \text{Cot.} 134^\circ 37' 3'',5 = - \text{Cot.} 45^\circ 22' 56'',5$; der Abschnitt ist größer als der Ausschnitt, weil er größer als ein Halbkreis ist.

§ 63.

Aufg. Einen Kreisausschnitt zu finden, welcher durch seine Sehne halbirt wird.

Aufl. 1) ACB (Fig. 74) sey der verlangte Ausschnitt, welcher durch seine Sehne AB halbirt wird, so daß Abschnitt ADBA $= \triangle$ ACB, oder $2 \triangle$ ACB $=$ Ausschnitt ACB. Nun ist Ausschnitt ACB $= \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ}$ (§ 59), und $\triangle ACB = \frac{1}{2} r^2 \text{ Sin.} \varphi$: man hat also die Gleichung,

BAYER.
STAATSBIBL.
MÜNCHEN

$$\frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} = r^2 \text{ Sin. } \varphi,$$

oder
$$\frac{\pi \varphi}{360^\circ} = \text{Sin. } \varphi.$$

2) Zur Auflösung einer solchen Gleichung zwischen einem Bogen und seinem Sinus, giebt es schwerlich ein bequemeres Mittel, als das, welches die sogenannte Regel Falsi darbietet. Um diese Rechnungsart mit Vortheil anwenden zu können, mache man vorher einige leichte Versuche, um wenigstens dem Werthe des Winkels φ etwas nahe zu kommen. Die Annahme $\varphi = 90^\circ$ giebt, $\frac{\pi \varphi}{360^\circ} = \frac{1}{4}\pi = 0{,}785 \ldots$ und Sin. $\varphi = 1$; folglich muß $\varphi > 90^\circ$ seyn. Nimmt man $\varphi = 120^\circ$: so ist $\frac{\pi \varphi}{360} = \frac{1}{3}\pi = 1{,}047 \ldots$ und Sin. $\varphi = 0{,}866 \ldots$; folglich muß $\varphi < 120^\circ$ seyn. Hieraus ergiebt sich schon, daß φ zwischen 90° und 120° fallen muß. Man setze daher nach einander $\varphi = 100^\circ$, $\varphi = 110^\circ$: so hat man,

Für $\varphi = 100^\circ$.		Für $\varphi = 110^\circ$.	
log. $\frac{\pi \varphi}{360^\circ}$	$= 0{,}9408474 - 1$	log. $\frac{\pi \varphi}{360^\circ}$	$= 0{,}9822401 - 1$
log. Sin. φ	$= 9{,}9933515 - 10$	log. Sin. φ	$= 9{,}9729858 - 10$
Fehler	525041	Fehler	-92543
abgezogen	-92543		

617584 Differenz der Fehler.

Man mache nun folgende Proportion:

$$617584 : 525041 = 10^\circ : 8^\circ\ 30' \text{ ungefähr}.$$

Man hat also beynahe $\varphi = 108^\circ\ 30'$.

3) Dieser für φ gefundene Werth, weicht schon, wie die

BAYER. STAATSBIBL. MÜNCHEN

folgende Rechnung zeigt, nicht mehr so sehr viel von der Wahrheit ab. Um ihn genauer zu bekommen, versuche man auch noch die Annahme $\varphi = 108° 35'$: man hat alsdann,

Für $\varphi = 108° 30'$.		Für $\varphi = 108° 35'$.	
log. $\frac{\pi\varphi}{360°}$	$= 0,9762771 - 1$	log. $\frac{\pi\varphi}{360°}$	$= 0,9766105 - 1$
log. Sin. φ	$= 9,9769566 - 10$	log. Sin. φ	$= 9,9767447 - 10$
Fehler	6795	Fehler	1342
abgezogen	1342		

5453 Differenz der Fehler.

Man mache nun folgende Proportion:

$$5453 : 1342 = 5' : 1' 13'' \text{ ungefähr.}$$

Man hat also beynahe $\varphi = 108° 35' + 1' 13'' = 108° 36' 13''$.

4) Da dieser Werth des φ, wie die folgende Rechnung zeigt, nur um etwas Weniges zu klein ist: so nehme man φ nur um eine Sekunde größer; man hat alsdann,

Für $\varphi = 108° 36' 13''$.		Für $\varphi = 108° 36' 14''$.	
log. $\frac{\pi\varphi}{360°}$	$= 0,9766916 - 1$	log. $\frac{\pi\varphi}{360°}$	$= 0,9766927 - 1$
log. Sin. φ	$= 9,9766930 - 10$	log. Sin. φ	$= 9,9766923 - 10$
Fehler	14	Fehler	-4
abgezogen	-4		

18 Differenz der Fehler.

Man setze also wieder:

$$18 : 4 = 1'' : 13'''.$$

5) Da dieser letzte Zusatz nur durch Tertien gegeben wird: so ist dies ein Zeichen, daß selbst die Sekunden in dem in (4)

gefundenen Werthe des φ schon richtig sind, und man kann daher $\varphi = 108^\circ\ 36'\ 13''$ setzen. Will man aber diesen Werth noch näher bestimmen: so muß man Logarithmen mit mehr als sieben Decimalstellen brauchen. Euler (Einleit. in die Anal. des Unendl. übers. von Michelsen, 2. B. Seite 452) that dies, und fand dadurch,

$$\varphi = 108^\circ\ 36'\ 13''\ 45'''\ 27^{\mathrm{VI}}\ 6^{\mathrm{V}}.$$

Anmerk. Das hier gebrauchte Verfahren gründet sich übrigens auf die sehr bekannte Eigenschaft der trigonometrischen Linien und ihrer Logarithmen, daß sich die Differenzen derselben, bey kleinen Aenderungen der Winkel, beynahe wie die Differenzen der Winkel selbst verhalten, welche Voraussetzung desto richtiger ist, je kleiner diese Aenderungen im Verhältnisse zum Winkel sind.

§ 64.

Aufg. Einen Halbkreis durch eine dem Durchmesser parallele Sehne zu halbiren.

Aufl. Es sey ADFEB (Fig. 75) ein Halbkreis, und DE # AB die Sehne, welche denselben halbiret, der Halbmesser $= r$, und der Winkel DCE $= \varphi$.

1) Da der Inhalt des Halbkreises $= \frac{1}{2}\pi r^2$, und der Inhalt des Abschnittes DFED $= \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin.} \varphi$ (§ 60): so hat man die Gleichung,

$$\tfrac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} - \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Sin.} \varphi,$$

oder $$90^\circ \pi = \pi \varphi - 180^\circ \operatorname{Sin.} \varphi,$$

oder auch $$\frac{\pi(\varphi - 90^\circ)}{180^\circ} = \operatorname{Sin.} \varphi.$$

Da φ nothwendig größer als 90° seyn muß: so setze man $\varphi = 90^\circ + \psi$; dies giebt $\operatorname{Sin.} \varphi = \operatorname{Cos.} \psi$, und man hat anstatt der vorigen Gleichung, diese,

$$\frac{\pi\psi}{180^\circ} = \text{Cos.}\,\psi.$$

2) Hieraus kann man auch auf die nämliche Art, wie im vorigen §, den Werth von ψ bestimmen. Da $\psi < 90^\circ$ seyn muß, weil $\varphi < 180^\circ$ ist: so versuche man $\psi = 45^\circ$. Diese Annahme giebt, $\frac{\pi\psi}{180^\circ} = \frac{1}{4}\pi = 0{,}785\ldots$, Cos. $\psi = 0{,}707\ldots$; woraus man schließt, daß ψ zwar kleiner als 45°, aber nicht sehr viel davon verschieden seyn muß, weil die Abweichung jener beyden Größen erst in der zweyten Decimalstelle statt hat. Setzt man daher $\psi = 40^\circ$: so hat man $\frac{\pi\psi}{180^\circ} = \frac{2}{9}\pi = 0{,}698\ldots$, und Cos. $\psi = 0{,}766\ldots$, und folglich ist $\psi > 40^\circ$. Nachdem man sich auf diese Art vorläufig überzeugt hat, daß der Werth von ψ zwischen 40° und 45° fallen muß: so kann man demselben, durch Hülfe der Proportionaltheile noch näher kommen. Man versuche zu dem Ende die beyden Annahmen $\psi = 41^\circ$, $\psi = 43^\circ$.

$\psi = 41^\circ$.		$\psi = 43^\circ$.	
log. $\frac{\pi\psi}{180^\circ}$	$= 0{,}8546613 - 1$	log. $\frac{\pi\psi}{180^\circ}$	$= 0{,}8753459 - 1$
log. Cos. ψ	$= 9{,}8777799 - 10$	log. Cos. ψ	$= 9{,}8641275 - 10$
Fehler	231186	Fehler	-112184
abgezogen	-112184		

343370 Differenz der Fehler.

Man setze nun,

$$343370 : 231186 = 2^\circ : 1^\circ\, 20' \text{ ungefähr.}$$

3) Man hat also $\psi = 41^\circ + 1^\circ\, 20'$. Da dieser Werth,

wie die folgende Rechnung zeigt, nur sehr wenig von der Wahrheit abweicht, so berechne man noch die Annahme $\psi = 42^\circ\ 21'$.

$\psi = 42^\circ\ 20'$.		$\psi = 42^\circ\ 21'$.	
$\log. \frac{\pi\psi}{180^\circ}$	$= 0{,}8685598 - 1$	$\log. \frac{\pi\psi}{180^\circ}$	$= 0{,}8687308 - 1$
$\log. \mathrm{Cos}.\ \psi$	$= 9{,}8687851 - 10$	$\log. \mathrm{Cos}.\ \psi$	$= 9{,}8686700 - 10$
Fehler	2253	Fehler	-608
abgezogen	-608		

2861 Differenz der Fehler.

Man setze nun wieder,

$$2861 : 2253 = 1' : 47''\ \text{ungefähr}.$$

Man erhält also $\psi = 42^\circ\ 20'\ 47''$, und in diesem Werthe sind schon die Sekunden richtig, wovon man sich überzeugen kann, wenn man ψ um $1''$ größer oder kleiner annimmt, und damit die Probe macht. Weiter kann aber die Näherung nicht getrieben werden, man müßte denn Logarithmen mit mehr als sieben Decimalstellen brauchen. Euler findet auf diese Art, in dem oben angeführten Werke,

$$\psi = 42^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''.$$

Aus diesem Werthe von ψ erhält man nun ferner,

$$\varphi = \psi + 90^\circ = 132^\circ\ 20'\ 47''\ 14'''.$$

Anmerk. Allgemeiner, aber auf eine ähnliche Art, behandelt Kästner diese Aufgabe, (Geom. Abhandl. 2te Samml. S. 129 u. f.), indem er einen Abschnitt zu machen lehrt, der zur Kreisfläche ein gegebenes Verhältniß hat.

§ 65.

Aufg. Zwey Kreise durchschneiden sich; die Halbmesser dieser Kreise, nebst der Linie, welche ihre Durch-

schnittspunkte verbindet, sind gegeben: man soll den Flächeninhalt des, beyden Kreisen gemeinschaftlichen, Mondes finden.

Aufl. Die beyden Kreise AFBG, AEBH, (Fig. 76) durchschneiden sich in den Punkten A, B; die Halbmesser AC = r, AD = ϱ, nebst der Linie AB = a sind gegeben: man sucht den Inhalt des, von den beyden Bogen AFB, AEB, eingeschlossenen Raumes, oder sogenannten Mondes AFBEA.

Setzt man $\angle$ ACB = φ, $\angle$ ADB = ψ: so ist nach § 61, $\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\varphi = \frac{a}{2r}$, $\text{Sin.}\ \frac{1}{2}\psi = \frac{a}{2\varrho}$. Hat man hieraus die Winkel φ und ψ bestimmt: so ist,

$$\text{Abschnitt AFBA} = \frac{\pi r^2\ \text{Sin.}\ \varphi}{360^\circ} - \tfrac{1}{2} r^2\ \text{Sin.}\ \varphi,$$

$$\text{Abschnitt AEBA} = \frac{\pi \varrho^2\ \text{Sin.}\ \psi}{360^\circ} - \tfrac{1}{2} \varrho^2\ \text{Sin.}\ \psi.$$

Der Mond AFBEA bestehet aus diesen beyden Abschnitten; man hat also auch diesen.

Beysp. Es sey r = 27', ϱ = 14', a = 9' 5'' 4'''. Hier ist $\varphi = 20^\circ\ 21'\ 4'',7$, $\psi = 39^\circ\ 50'\ 26'',9$; folglich, Abschnitt AFBA = 2,705 □', Abschnitt AEBA = 5,361 □', und daher AFBEA = 8,066 □'.

Zus. Nachdem der Mond AFBEA gefunden worden, ist es leicht, auch den Inhalt der Monde AFBHA, AEBGA, zu finden; denn man darf nur jenen von den Kreisflächen AFBG, AEBH, abziehen.

Ziehet man in irgend einem Kreise AFBG (Fig. 77) die beyden Halbmesser AC, CB, auf einander perpendikulär, und nimmt AB zum Durchmesser des zweyten Kreises AEBH an: so ist $\varphi = 90^\circ$, $\psi = 180^\circ$, AB = a = $r\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}$ AB = $r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Für diesen Fall ist daher,

$$\text{Abschnitt AFBA} = \frac{\pi r^2 . 90^\circ}{360^\circ} - \tfrac{1}{2} r^2 \text{Sin}. 90^\circ = \tfrac{1}{4}\pi r^2 - \tfrac{1}{2} r^2,$$

$$\text{Abschnitt AEBA} = \frac{\tfrac{1}{2}\pi r^2 . 180^\circ}{360^\circ} - \tfrac{1}{4} r^2 \text{Sin}. 180^\circ = \tfrac{1}{4}\pi r^2;$$

folglich der Mond AFBEA $= \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2$. Nimmt man denselben von der Kreisfläche AEBH $= \frac{1}{2}\pi r^2$ hinweg: so hat man den Mond AFBHA $= \frac{1}{2} r^2 = AD^2 = \triangle$ ACB. Der Flächeninhalt dieses letzteren Mondes hängt also nicht von der Quadratur des Kreises ab: er ist nämlich jedesmal so groß, als das Quadrat vom Halbmesser des kleineren Kreises, oder auch, als das Dreyeck ACB.

Da ACB ein rechter Winkel ist: so gehet der Kreis AEBH dnrch den Mittelpunkt C des anderen Kreises. Zieht man nun den Durchmesser XZ der AB parallel: so entstehen zwey gleiche krummlinigte Ausschnitte ACX, BCZ, von welchen der erste durch die Bogen AC, AX und den Halbmesser CX, der zweyte durch die Bogen BC, BZ, und den Halbmesser CZ begränzt wird. Der Inhalt beyder Ausschnitte zusammen, wird gefunden, wenn man von der halben Kreisfläche XFZ $= \frac{1}{2}\pi r^2$, den Mond AFBEA $= \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2} r^2$ hinweg nimmt. Jeder dieser Ausschnitte ist demnach die Hälfte des Dreyecks ACB, oder die Hälfte des Mondes AFBHA.

Es sey XCA′ ein dem XCA gleicher krummlinigter Ausschnitt: so ist das von den drey Kreisbogen AA′, CA, CA′ begränzte, krummlinigte Dreyeck ACA′ $= \triangle$ ACB. Ferner ist ACB ein rechter Winkel, und daher $\angle$ ACX $= \angle$ BCZ $= \frac{1}{2}$ R, folglich, wenn die geraden Linien CA′, AA′ gezogen werden, ACA′ ebenfalls ein rechter Winkel, und $\triangle$ ACA′ $= \triangle$ ACB; demnach ist auch das krummlinigte Dreyeck ACA′ $= \triangle$ ACA′. Da die Bogen AA′, AC, Quadranten ihrer respektiven Kreise sind: so ist Arc. AA′ : Arc. AC $= r : \varrho$, und

daher $(\text{Arc. } AA')^2 : (\text{Arc. } AC)^2 = r^2 : \varrho^2 = 2 : 1$. Hieraus folgt, daß $(\text{Arc. } AA')^2 = (\text{Arc. } AC)^2 + (\text{Arc. } A'C)^2$. Das geradlinigte Dreyeck ACA' ist also dem krummlinigten, ACA', an Flächeninhalt gleich, und hat mit ihm die Eigenschaft gemein, daß das Quadrat einer seiner Seiten den Quadraten seiner beyden anderen Seiten zusammen genommen gleich ist.

VII. Aufgaben, mit ihren analytischen und geometrischen Auflösungen, hauptsächlich in Hinsicht auf geometrische Construktionen.

§ 66.

Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, ein Winkel an derselben, und der Unterschied der beyden anderen Seiten, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. In dem Dreyecke ABC (Fig. 78. 79) ist die Grundlinie BC, der Winkel ACB, und der Unterschied der beyden Seiten AC, AB, gegeben: man soll das Dreyeck finden. Es sey $BC = a$, $ACB = \alpha$, $AC - AB = \pm d$; das obere Zeichen gilt für Fig. 78, das untere für Fig. 79.

1) Wäre der Winkel BAC bekannt: so hätte man im Dreyecke ABC zwey Winkel und eine Seite; folglich das Dreyeck selbst. Man setze daher $BAC = \varphi$.

2) Alsdann ist,

$$AC = \frac{a \text{ Sin. } (\alpha + \varphi)}{\text{Sin. } \varphi}, \quad AB = \frac{a \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } \varphi};$$

folglich, da $AC - AB = \pm d$,

$$\frac{a\,[\text{Sin.}\,(\alpha+\varphi)-\text{Sin.}\,\alpha]}{\text{Sin.}\,\varphi}=\pm d.$$

3) Aber Sin. $(\alpha+\varphi)$ — Sin. $\alpha = 2$ Cos. $(\alpha+\frac{1}{2}\varphi)$ Sin. $\frac{1}{2}\varphi$, (§. 16), und Sin. $\varphi = 2$ Sin. $\frac{1}{2}\varphi$ Cos. $\frac{1}{2}\varphi$, (§. 25); man hat also,

$$\frac{2\,a\,\text{Cos.}\,(\alpha+\frac{1}{2}\varphi)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\varphi}{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\varphi\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\varphi}=\pm d,$$

oder
$$\frac{a\,\text{Cos.}\,(\alpha+\frac{1}{2}\varphi)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\varphi}=\pm d.$$

4) Cos. $(\alpha+\frac{1}{2}\varphi)$ = Cos. α Cos. $\frac{1}{2}\varphi$ — Sin. α Sin. $\frac{1}{2}\varphi$, (§. 10) und $\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\varphi}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\varphi}$ = Tang. $\frac{1}{2}\varphi$, (§. 2); folglich,

$$a\,(\text{Cos.}\,\alpha-\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi)=\pm d,$$

und daher Tang. $\frac{1}{2}\varphi = \frac{a\,\text{Cos.}\,\alpha \mp d}{a\,\text{Sin.}\,\alpha} = \text{Cot.}\,\alpha \mp \frac{d}{a\,\text{Sin.}\,\alpha}$.

Beysp. Für $a = 173'$, $d = -27'$, $\alpha = 56^\circ\ 25'\ 13''$, ist $\varphi = 80^\circ\ 48'\ 36''$.

Construktion. An die gegebene Grundlinie BC, lege man den Winkel BCA $= \alpha$; nehme auf CA, (Fig. 78), wenn CA > AB seyn soll, und folglich d positiv ist, oder auf ihre Verlängerung, (Fig. 79), wenn CA < AB seyn soll, und folglich d negativ ist, CD = d, und ziehe BD; mache hierauf den Winkel ABD = ADB, und verlängere die Linien, bis sie sich in A schneiden: so wird ABC das gesuchte Dreyeck seyn.

Denn man ziehe auf AC, BD, die Perpendikel BE, AF: so ist, (weil BC = a, BCA $= \alpha$,) BE = a Sin. α, CE = a Cos. α; daher DE = a Cos. $\alpha \mp d$, (das obere Zeichen für Fig. 78, das untere für Fig. 79) und

$$\text{Tang. DBE}=\frac{\text{DE}}{\text{BE}}=\frac{a\,\text{Cos.}\,\alpha\mp d}{a\,\text{Sin.}\,\alpha}.$$

Da nun $\angle$ ABD $=$ $\angle$ ADB, vermöge der Construktion: so ist ADB ein gleichschenklichtes Dreyeck, und daher, weil AF auf der Grundlinie BD perpendikulär stehet, DAF $= \frac{1}{2}$ BAD $= \frac{1}{2}\varphi$. Aber $\angle$ DAF $= \angle$DBE, weil $\triangle$ ADF $\backsim$ $\triangle$ DBE; folglich ist auch,

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \varphi = \frac{\text{a Cos.}\ \alpha \mp \text{d}}{\text{a Sin.}\ \alpha}.$$

Synthetischer Beweis. Das Dreyeck ABC hat die gegebene Grundlinie BC, und den gegebenen Winkel BCA, (nach der Construktion). Ferner ist im gleichschenklichten Dreyecke AB $=$ AD, und daher AC $-$ AB $=$ AC $-$ AD $= \pm$ CD $= \pm$ d.

Anmerk. Wenn d positiv und $=$ a Cos. φ ist, giebt die Formel Tang. $\frac{1}{2}$ $\varphi = 0$, und daher $\varphi = 0$; in der Figur fällt alsdann der Punkt D auf den Punkt E, und man hat $\angle$ ABD $=$ $\angle$ ADB $= 90^\circ$, folglich AB $\#$ AC. Wird d $>$ a Cos. φ: so ist Tang. $\frac{1}{2}\varphi$ negativ, folglich $\frac{1}{2}\varphi$ ein stumpfer Winkel, und $\varphi > 180^\circ$; in der Figur fällt alsdann D über E hinaus, ACB, folglich auch ABC wird ein stumpfer Winkel, und die Linien AB, AC, stoßen nicht mehr dies=, sondern jenseits der Linie BC zusammen. Da indessen für diesen Fall, der Winkel ACB nicht mehr in dem Dreyecke ACB liegt, sondern ein Aussenwinkel desselben wird: so kann diese Auflösung wenigstens hier nicht gebraucht werden.

§ 67.

Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Summe der beyden anderen Seiten und der Scheitelwinkel desselben, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. In dem Dreyecke BAC (Fig. 80) ist die Grundlinie BC $=$ a, die Summe der Seiten AB $+$ AC $=$ s und der Scheitelwinkel BAC $= \alpha$ gegeben: man soll das Dreyeck finden.

1) Da BAC $= \alpha$: so ist ABC $+$ ACB $= 180^\circ - \alpha$.

Die Summe der beyden Winkel an der Grundlinie ist also bekannt, und man darf nur ihre Differenz wissen, um sie einzeln finden zu können. Es sey daher ABC — ACB $= \varphi$: so ist ABC $= 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varphi$, ACB $= 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\varphi$.

2) Man hat demnach,

$$AC = \frac{a \text{ Sin. } ABC}{\text{Sin. } \alpha} = \frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)}{\text{Sin. } \alpha}.$$

$$AB = \frac{a \text{ Sin. } ACB}{\text{Sin. } \alpha} = \frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2}(\alpha + \varphi)}{\text{Sin. } \alpha}.$$

Da nun AB + AC $= s$: so ist,

$$\frac{a\,[\text{Cos. } \frac{1}{2}(a + \varphi) + \text{Cos. } \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)]}{\text{Sin. } \alpha} = s.$$

3) $\text{Cos. } \frac{1}{2}(\alpha + \varphi) + \text{Cos. } \frac{1}{2}(\alpha - \varphi) = 2 \text{ Cos. } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \frac{1}{2}\varphi$, (F. 17), und $\text{Sin. } \alpha = 2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \frac{1}{2}\alpha$, (F. 25), folglich,

$$\frac{2\,a \text{ Cos. } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \frac{1}{2}\varphi}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos } \frac{1}{2}\alpha} = s,$$

und $$\text{Cos. } \frac{1}{2}\varphi = \frac{s \text{ Sin } \frac{1}{2}\alpha}{a}.$$

4) Hat man hieraus φ bestimmt: so hat man auch die Winkel ABC $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)$, ACB $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \varphi)$, und somit auch das Dreyeck selbst.

Beysp. Für $a = 125',67$, $s = 152',39$, $\alpha = 49^\circ\,37'\,48''$ ist $\varphi = 118^\circ\,48'\,56''$, und daher ABC $= 124^\circ\,35'\,34''$, ACB $= 5^\circ\,46'\,38''$.

Construkt. Man ziehe eine Linie BD $= s$; an D lege man den Winkel BDC $= \frac{1}{2}\alpha$; beschreibe aus B mit BC $= a$ einen Kreisbogen, welcher die Linie DC in C schneidet; mache den Winkel DCA $=$ ADC, und ziehe CB: so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Denn man ziehe auf DC das Perpendikel BE: so ist BE $=$ BD Sin. BDC $= s$ Sin. $\frac{1}{2}\alpha$, und Cos. CBE $=$

$\frac{BE}{BC} = \frac{s \text{ Sin. } \frac{1}{2} \alpha}{a} = \text{Cos. } \frac{1}{2} \varphi$; folglich, $CBE = \frac{1}{2} \varphi$, $BCE = 90^\circ - \frac{1}{2} \varphi$. Man hat also $ACB = DCB - DCA = 90^\circ - \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \alpha$, $ABC = DBE + EBC = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \varphi$, wie erfordert wird.

Synth. Beweis. Da $\angle BDC = \angle DCA$: so ist $BAC = BDC + DCA = 2 BDC = \alpha$; auch ist $BA + AC = BA + AD = BD = s$, und $BC = a$; folglich BAC das verlangte Dreyeck.

Anmerk. Die Aufgabe ist nur alsdann möglich, wenn $a < s$, und zugleich $s \text{ Sin. } \frac{1}{2} \alpha < a$ ist; das Erste deshalb, weil die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks immer größer ist, als die dritte Seite, das Zweyte, weil $\text{Cos. } \frac{1}{2} \varphi$ nicht größer als 1 seyn kann. Es erhellet übrigens auch aus der Figur, daß $BC = a$ nicht größer seyn darf, als $BE = s \text{ Sin. } \frac{1}{2} \alpha$, weil sie sonst die Linie DC nicht erreichen würde, wie doch zur Construktion erfordert wird.

Wäre in der Aufgabe anstatt der Summe, der Unterschied der Seiten gegeben: so könnte man sie auf eine ähnliche Art auflösen.

§ 56.

Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, der Unterschied der beyden Winkel an derselben, und der Unterschied der Seiten ist gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. In dem Dreyeck ABC (Fig. 81), ist die Grundlinie $BC = a$, der Unterschied der Winkel an derselben, oder $ABC - ACB = \alpha$, und der Unterschied der beyden Seiten, oder $AC - AB = d$ gegeben: man soll das Dreyeck finden.

1) Da der Unterschied der Winkel ABC, ACB, gegeben ist: so darf man nur die Summe derselben wissen, um sie einzeln bestimmen zu können. Man setze daher $ABC + ACB = \varphi$: so hat man $ABC = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, $ACB = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$; ferner, $BAC = 180^\circ - \varphi$.

2) Hieraus folgt,

$$AC = \frac{a \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha)}{\text{Sin.}\, \varphi}, \; AB = \frac{a \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)}{\text{Sin.}\, \varphi}.$$

Daher ist $AC - AB = \frac{a\,[\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) - \text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)]}{\text{Sin.}\, \varphi} = d.$

3) $\text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) - \text{Sin.} \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) = 2 \,\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\varphi \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\alpha$, (F. 16), $\text{Sin.}\, \varphi = 2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\varphi \,\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\varphi$, (F. 25); folglich ist,

$$\frac{2\, a \,\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\varphi \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\alpha}{2 \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\varphi \,\text{Cos.} \tfrac{1}{2}\varphi} = d.$$

und daher $\quad \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\alpha}{d}.$

4) Hat man hieraus den Werth von φ bestimmt: so hat man auch die Winkel $ABC = \tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, $ACB = \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)$, $BAC = 180^\circ - \varphi$, und demnach, da auch die Linie BC gegeben ist, das Dreyeck ABC.

Beysp. Für $a = 234'$, $d = 98'$, $\alpha = 30^\circ\, 59'\, 34''$, ist $\tfrac{1}{2}\varphi = 39^\circ\, 38'\, 22''$, $ABC = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha = 55^\circ\, 8'\, 9''$, $ACB = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha = 24^\circ\, 8'\, 35''$.

Construkt. An BC, der gegebenen Grundlinie des Dreyecks, lege man den Winkel $CBD = \tfrac{1}{2}\alpha$, und schneide aus C mit $CD = d$, die Linie BD in D, ziehe CD und verlängere sie; mache hierauf den Winkel $DBA = ADB$, und verlängere BA, DA, bis sie einander in A begegnen: so ist ABC das gesuchte Dreyeck.

Denn man verlängere BD, und ziehe darauf CE perpendikulär: so ist $CE = BC \,\text{Sin.}\, CBE = a \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\alpha$, Sin. CDE $= \frac{CE}{CD} = \frac{a \,\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\alpha}{d} = \text{Sin.} \tfrac{1}{2}\varphi$; folglich $CDE = ADB = ABD = \tfrac{1}{2}\varphi$, $ABC = ABD + CBD = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha$, und $ACB = ADB - CBD = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha$, wie erfordert wird.

Anmerk. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn CD kleiner als das

Perpendikel CE ist, indem alsdann die Linie CD die BD nicht erreichen kann. Dies stimmt auch mit der Rechnung überein, da d nicht kleiner als a Sin. $\frac{1}{2}\alpha$ seyn darf, weil sonst Sin. $\frac{1}{2}\varphi > 1$ seyn würde, welches unmöglich ist.

§ 69.

Aufg. Der Scheitelwinkel eines Dreyecks und die Segmente, in welche das von der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gezogene Perpendikel dieselbe theilt, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. In dem Dreyecke ABC (Fig. 82) ist der Scheitelwinkel BAC $= \alpha$ gegeben; auch sind die Segmente BF $=$ a, CF $=$ b, in welche die Grundlinie durch das Perpendikel AF getheilt wird, gegeben: man soll das Dreyeck bestimmen.

1) Da BF $=$ a $=$ AF Tang. BAF, und CF $=$ b $=$ AF Tang. CAF: so ist

$$a : b = \text{Tang. BAF} : \text{Tang. CAF};$$

folglich

$$\begin{aligned} a+b : a-b &= \text{Tang.BAF}+\text{Tang.CAF} : \text{Tang.BAF}-\text{Tang.CAF} \\ &= \text{Sin.}(\text{BAF}+\text{CAF}) : \text{Sin.}(\text{BAF}-\text{CAF}) \quad (\text{§. } 42) \\ &= \text{Sin.}\,\alpha : \text{Sin.}(\text{BAF}-\text{CAF}). \end{aligned}$$

2) Hieraus erhält man,

$$\text{Sin.}(\text{BAF}-\text{CAF}) = \frac{(a-b)\,\text{Sin.}\,\alpha}{a+b}.$$

oder, da BAF $= 90^\circ -$ ABC, und CAF $= 90^\circ -$ ACB, und daher BAF $-$ CAF $=$ ACB $-$ ABC,

$$\text{Sin.}(\text{ACB}-\text{ABC}) = \frac{(a-b)\,\text{Sin.}\,\alpha}{a+b}.$$

3) Hat man aus dieser Gleichung die Differenz der Winkel an der Grundlinie ACB $-$ ABC bestimmt: so hat man auch, weil ihre Summe schon bekannt ist, indem ACB $+$ ABC $= 180^\circ - \alpha$, die Winkel ACB, ABC, selbst.

Beisp. Für a = 247′, b = 53′, α = 113° 20′ 54″, findet man ACB − ABC = 36° 25′ 15″,25. Da nun ACB + ABC = 66° 39′ 6″: so ist ACB = 51° 32′ 10″,62, ABC = 15° 6′ 55″,37.

Construkt. Auf einer unbegränzten Linie nehme man BF = a, CF = b; beschreibe über BC einen, des gegebenen Winkels α fähigen, Kreisabschnitt BAC. Aus F errichte man das Perpendikel FA, welches den Kreisbogen in A trifft, und ziehe die Linien BA, CA: so wird BAC das gesuchte Dreyeck seyn.

Denn man mache FD = FC: so ist ∠ FAD = ∠ FAC, ∠ ADC = ∠ ACD; ferner

$$\begin{aligned} BC : AB &= \text{Sin. } BAC : \text{Sin. } ACB \\ AB : BD &= \text{Sin. } ADB : \text{Sin. } BAD \\ &= \text{Sin. } ACB : \text{Sin. } BAD, \end{aligned}$$

folglich $BC : BD = \text{Sin. } BAC : \text{Sin. } BAD$;

oder da BC = a + b, BD = a − b, BAC = α, BAD = BAF − FAD = BAF − FAC = ACB − ABC,

$$a + b : a - b = \text{Sin. } \alpha : \text{Sin. } (ACB - ABC)$$

und daher $\text{Sin. } (ACB - ABC) = \frac{(a - b)\ \text{Sin. } \alpha}{a + b}$, wie erfordert wird.

Zus. Wären nicht die Segmente selbst, sondern nur ihr Verhältniß gegen einander gegeben, überdies aber noch die Höhe des gesuchten Dreyecks: so sey m : n das gegebene Verhältniß der Segmente und p die Höhe des Dreyecks. Man konstruire alsdann zuerst, wie so eben gelehrt worden, ein Dreyeck BAC, dessen Segmente BF, FC, den Linien m, n, gleich sind, und nehme auf dem, wenn es nöthig ist, verlängerten Perpendikel AF, AO = p; durch O ziehe man die Linie MN der BC parallel, welche die Linien AB, AC, oder

ihre

ihre Verlängerungen in M, N, schneidet: so ist MAN das gesuchte Dreyeck. Der Grund von diesem Verfahren ist leicht einzusehen.

Wäre anstatt der Höhe des Dreyeckes, eine der Seiten, etwa AM gegeben: so darf man nur auf AB, oder ihre Verlängerung den Punkt M so bestimmen, daß AM die erforderliche Größe hat, und alsdann aus M, die MN der BC parallel ziehen, um das gesuchte Dreyeck MAN zu erhalten.

§ 79.

Aufg. Der Scheitelwinkel eines Dreyecks, die Summe seiner Seiten, und der Unterschied der Segmente, in welche ein Perpendikel aus der Spitze dieses Winkels die Grundlinie theilt, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Erste Aufl. Es sey BAC (Fig. 82) das gesuchte Dreyeck, die Summe der Seiten $AB + AC = a$, der Unterschied der Segmente $BF - CF = d$, und der Scheitelwinkel $BAC = \alpha$. Wäre noch der Unterschied der Seiten AB, AC, bekannt: so könnte man solche einzeln bestimmen. Man setze daher $AB - AC = x$: so ist $AB = \frac{a+x}{2}$, $AC = \frac{a-x}{2}$. Es sey ferner $BC = y$.

2) Da $AB^2 = AF^2 + BF^2$, $AC^2 = AF^2 + CF^2$: so ist $AB^2 - AC^2 = BF^2 - CF^2$, oder,

$$(AB + AC)(AB - AC) = (BF + CF)(BF - CF),$$

oder $$ax = dy.$$

3) In dem Dreyecke BAC hat man,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\,.\,AC\,.\,\text{Cos.}\,\alpha,$$

oder $$y^2 = \left(\frac{a+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - x^2}{2}\,\text{Cos.}\,\alpha.$$

Wird hierin für y sein Werth $\frac{ax}{d}$ aus (2) gesetzt, und die Gleichung aufgelöst: so erhält man,

$$x = \sqrt{\frac{a^2 d^2 (1 - \text{Cos.}\,\alpha)}{2a^2 - d^2(1 + \text{Cos.}\,\alpha)}}.$$

oder, da $1 + \text{Cos.}\,\alpha = 2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha^2$, $1 - \text{Cos.}\,\alpha = 2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2$, (§. 7 und 8),

$$x = \sqrt{\frac{a^2 d^2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}{a^2 - d^2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}} = \frac{ad\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{(a^2 - d^2\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha^2)}}$$

Zweyte Aufl. 1) Aus (2) der vorigen Auflösung hat man,

$$a(AB - AC) = dy,$$

und daher,

$$AB - AC = \frac{dy}{a}.$$

2) Man setze nun den Winkel $ABC = \varphi$: so ist $ACB = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$, und

$$AB = \frac{y\,\text{Sin.}\,(\alpha + \varphi)}{\text{Sin.}\,\alpha},\quad AC = \frac{y\,\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,\alpha};$$

folglich,

$$AB - AC = \frac{y\,[\text{Sin.}\,(\alpha + \varphi) - \text{Sin.}\,\varphi]}{\text{Sin.}\,\alpha}$$

$$= \frac{2y\,\text{Cos.}\,(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha}{2\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha},\ (\text{§. 16 u. 25})$$

$$= \frac{y\,\text{Cos.}\,(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha}.$$

3) Werden die beyden Ausdrücke für AB — AC in (1) und (2) einander gleich gesetzt: so erhält man,

$$\text{Cos.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha + \varphi) = \frac{d\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\alpha}{a};$$

woraus sich der Winkel φ bestimmen läßt.

4) Da ferner $AB + AC = a$: so hat man aus (2)

$$\frac{y\,[\text{Sin.}\,(\alpha + \varphi) + \text{Sin.}\,\varphi]}{\text{Sin.}\,\alpha} = a,$$

oder, $\frac{2y \,\text{Sin.}(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha}{2\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha} = a$, (F. 15 u. 25)

und demnach, $y = \frac{a\,\text{Sin.}\frac{1}{2}\alpha}{\text{Sin.}(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}$;

ferner $AB = \frac{y\,\text{Sin.}(\alpha + \varphi)}{\text{Sin.}\,\alpha} = \frac{a\,\text{Sin.}(\alpha + \varphi)}{2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha\,\text{Sin.}(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}$,

$AC = \frac{y\,\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,\alpha} = \frac{a\,\text{Sin.}\,\varphi}{2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha\,\text{Sin.}(\frac{1}{2}\alpha + \varphi)}$.

Da die zweyte Auflösung alle Stücke des gesuchten Dreyecks auf Einmal, durch einfache, leicht zu berechnende Formeln giebt: so ist sie der ersteren vorzuziehen.

Beysp. Für $a = 207'$, $d = 13'\,7''$, $\alpha = 61^\circ\,23'\,18''$, findet man $\frac{1}{2}\alpha + \varphi = 86^\circ\,44'\,14'',8$, $\varphi = 56^\circ\,2'\,35'',8$; und hieraus $BC = y = 105',8357$, $AB = 107',0022$, $AC = 99',9976$.

Construkt. Auf einer unbegränzten Linie (Fig. 83) nehme man $BD = d$, und mache CDG dem halben Nebenwinkel des gegebenen Scheitelwinkels gleich, also $= 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$; aus B schneide man mit $BG = a$, die Linie DG in G, und ziehe BG; mache hierauf den Winkel $GDA = DGA$, und beschreibe aus A mit AB einen Kreis, welcher die unbegränzte Linie in C schneidet, und ziehe AC: so wird BAC das verlangte Dreyeck seyn.

Denn da $CDG = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$: so ist $BGD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - ABC$; folglich $\text{Sin.}\,BDG = \text{Sin.}\,CDG = \text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha$, $\text{Sin.}\,BGD = \text{Sin.}[90^\circ - (\frac{1}{2}\alpha + ABC)] = \text{Cos.}(\frac{1}{2}\alpha + ABC)$. Nun ist aber im Dreyecke BGD,

$BG : BD = \text{Sin.}\,BDG : \text{Sin.}\,BGD$

oder $a : d = \text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha : \text{Cos.}(\frac{1}{2}\alpha + ABC)$;

folglich ist $\text{Cos.}(\frac{1}{2}\alpha + ABC) = \frac{d\,\text{Cos.}\frac{1}{2}\alpha}{a}$.

Nach der analytischen Auflösung ist aber auch

$$\text{Cos.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha + \varphi) = \frac{d\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\alpha}{a};$$

man hat daher $\frac{1}{2}\alpha + ABC = \frac{1}{2}\alpha + \varphi$, und $ABC = \varphi$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Man ziehe auf BC das Perpendikel AF: so sind BF, FC, die Segmente des Dreyecks BAC.

Da $\angle\, GAC = 2\,\angle\, GDC$, (El. III. 20): so ist GAC der Nebenwinkel des Scheitelwinkels im gesuchten Dreyecke; folglich BAC dieser Scheitelwinkel selbst. Ferner ist,

$$AB + AC = AB + AG = BG = a,$$
$$BF - CF = BF - DF = BD = d.$$

W. Z. E. W.

§ 71.

Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, die Höhe desselben, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, ist gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. Das gesuchte Dreyeck sey BAC (Fig. 82); die Grundlinie $BC = a$, die Höhe $AF = h$, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie $ACB - ABC = \alpha$.

1) Könnte man aus diesen Angaben die Summe der Winkel ACB, ABC, bestimmen: so hätte man die Winkel, und somit auch das Dreyeck. Man setze demnach $ACB + ABC = \varphi$: so ist $ACB = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)$, $ABC = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$.

2) Aus den rechtwinklichten Dreyecken AFC, AFB, erhält man alsdann,

$$CF = h\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha),\quad BF = h\,\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha).$$

Da nun $CF + BF = a$: so hat man die Gleichung

$$h\,[\text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha) + \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)] = a.$$

3) Es ist aber, $\text{Cot.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \alpha) + \text{Cot.}\,\frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$

$$= \frac{\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \alpha)\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha)},$$ (§. 23) und

$\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)\ \text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \frac{1}{2}[\text{Cos.}\ \alpha - \text{Cos.}\ \varphi]$ (§. 14); man hat daher anstatt der vorigen Gleichung folgende:

$$\frac{h\ \text{Sin.}\ \varphi}{\frac{1}{2}[\text{Cos.}\ \alpha - \text{Cos.}\ \varphi]} = a,$$

oder $$\text{Sin.}\ \varphi + \frac{a}{2h}\ \text{Cos.}\ \varphi = \frac{a}{2h}\ \text{Cos.}\ \alpha.$$

4) Um hieraus den Werth von φ auf die leichteste Art zu bestimmen, kann man folgenden Kunstgriff brauchen. Man setze $\text{Tang.}\ \mu$ für $\frac{a}{2h}$, d. h. man bestimme einen Winkel μ von solcher Beschaffenheit, daß die Tangente desselben dem in Zahlen berechneten Ausdrucke $\frac{a}{2h}$ gleich sey; hierdurch verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$\text{Sin.}\ \varphi + \text{Tang.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \varphi = \text{Tang.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \alpha;$$

oder, wenn man auf beyden Seiten mit $\text{Cos.}\ \mu$ multiplicirt, und $\text{Sin.}\ \mu$ für $\text{Cos.}\ \mu\ \text{Tang.}\ \mu$ setzt, (§. 2),

$$\text{Cos.}\ \mu\ \text{Sin.}\ \varphi + \text{Sin.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \varphi = \text{Sin.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \alpha,$$

oder auch $\text{Sin.}\ (\varphi + \mu) = \text{Sin.}\ \mu\ \text{Cos.}\ \alpha$, (§. 9); woraus sich nun φ bestimmen läßt.

Beysp. Es sey $a = 1365'$, $h = 789'$, $\alpha = 21°\ 39'\ 18''$. Hier ist $\log.\ \text{Tang.}\ \mu = \log.\ \frac{a}{2h} = 9{,}9370257$, und daher $\mu = 40°\ 51'\ 37'',55$. Hieraus erhält man nun ferner, $\log.\ \text{Sin.}\ (\varphi + \mu)$ $\log.\ \text{Sin.}\ \mu + \log.\ \text{Cos.}\ \alpha = 9{,}7839362$, und folglich $\varphi + \mu = 37°\ 26'\ 53'',96$, oder $\varphi + \mu = 142°\ 33'\ 6'',04$. Der erste von den beyden für $\varphi + \mu$ gefundenen Werthen darf hier nicht gebraucht werden, weil $\varphi + \mu$ nothwendig größer als μ seyn muß. Nimmt man daher den zweyten Werth: so erhält man, $\varphi = 101°\ 41'\ 28'',49$, und hieraus $ACB = \frac{1}{2}(\varphi + \alpha) = 61°\ 40'\ 23'',24$, $ABC = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) = 40°\ 1'\ 5'',24$.

Construkt. Aus D, der Mitte der gegebenen Grundlinie BC (Fig. 84), ziehe man KF darauf perpendikulär, und mache DE $=$ h; aus E ziehe man die Linie EG der BC parallel, und lege an ED den Winkel EDG $= \alpha$: so wird dadurch der Punkt G bestimmt. Man ziehe nun EB, und schneide aus D mit DG die verlängerte EB in H; beschreibe hierauf über BC einen Bogen, welcher den Winkel HDK in sich faßt, und aus dem Punkte A, wo dieser Bogen die Linie EG schneidet, ziehe man die Linien AB, AC: so ist BAC das verlangte Dreyeck.

Diese Construktion läßt sich auf folgende Art aus der analytischen Auflösung herleiten.

Da BD $= \frac{1}{2}$ a, DE $=$ h: so ist Tang. BED $= \frac{BD}{DE} = \frac{a}{2h} =$ Tang. μ; folglich BED $= \mu$. Ferner ist im Dreyecke HED,

$$HD : ED = \text{Sin. HED} : \text{Sin. DHE},$$

oder da HD $=$ DG $=$ DE Sec. GDE $= \frac{h}{\text{Cos. } \alpha}$,

$$\frac{h}{\text{Cos. } \alpha} : h = \text{Sin. } \mu : \text{Sin. DHE},$$

folglich $\quad$ Sin. DHE $=$ Sin. DHI $=$ Sin. μ Cos. α.

Nun ist aber auch vermöge der analytischen Auflösung Sin. $(\varphi + \mu) =$ Sin. μ Cos. α; man hat daher entweder $\varphi + \mu =$ DHE, oder $\varphi + \mu =$ DHI. Die erste Voraussetzung kann hier nicht statt finden: denn da DH $=$ DG nothwendig $>$ DE ist, so ist auch $\angle$ DEH $> \angle$ DHE (El. I. 18); es müßte also $\mu > \varphi + \mu$ seyn, welches unmöglich ist. Man hat daher DHI $= \varphi + \mu$, und folglich EDH $=$ DHI $-$ DEH $= \varphi$. Da nun φ die Summe der beyden Win-

kel an der Grundlinie im gesuchten Dreyecke bezeichnet: so muß HDK der Scheitelwinkel dieses Dreyecks seyn; woraus alsdann alles Uebrige folgt.

Synth. Bew. Das Dreyeck BAC hat, wie aus der Construktion unmittelbar erhellet, die gegebene Grundlinie und die gegebene Höhe; es muß daher nur noch bewiesen werden, daß auch ABC — ACB = GDE = α sey. Man verlängere zu dem Ende die Linie GE, bis sie den Kreisbogen in L schneidet, und ziehe aus dem Mittelpunkte O die Halbmesser OA, OB, OC, OL: so ist BOC = 2 BAC (El. III. 20), und BOD = $\frac{1}{2}$ BOC = BAC; aber auch HDK = BAC (konstr.), folglich HDK = BOK, und BO ♯ HD. Da ferner DH = DG, OB = OA: so ist DH : OB = DG : OA: aber auch DH : OB = DE : EO, folglich DG : OA = DE : EO, △ AEO ∽ △ GED (El. VI. 7), und daher OA ♯ DG. Nun ziehe man CL, so ist ACL = BCL — ACB = ABC — ACB; ferner ist ACL = $\frac{1}{2}$ AOL = AOE = GDE: folglich ABC — ACB = GDE. W. Z. E. W.

§ 72.

Aufg. Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das Rechteck zwischen den beyden Theilen einem gegebenen Quadrate gleich sey.

Aufl. Die gegebene Linie AB = a (Fig. 85) soll in G so getheilt werden, daß AG × GB = mn^2 = b^2 sey.

Man setze AG = x: so ist BG = a — x; Rechteck AG × GB = x (a — x), und daher

$$x\,(a - x) = b^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$$x = \tfrac{1}{2}\,a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}\,a^2 - b^2)}.$$

Construkt. Man beschreibe über AB einen Halbkreis AFB; aus B errichte man das Perpendikel BZ, und nehme

darauf BE = mn; aus E ziehe man die Linie EF der AB parallel, welche den Halbkreis in F, f schneidet, und lasse aus diesen Punkten auf AB die Perpendikel FG, fg herab: so ist G oder g der verlangte Theilungspunkt.

Denn ziehet man den Halbmesser CF: so ist $CG^2 = CF^2 - FG^2 = CB^2 - BE^2 = \frac{1}{4} a^2 - b^2$; also $CG = Cg = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - b^2)}$, und daher $AG = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - b^2)}$, $Ag = \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - b^2)}$, welches die beyden für x gefundenen Werthe sind.

Der synthetische Beweis dieser Construktion gründet sich auf El. VI. 13 und 17.

§ 73.

Aufg. Eine gegebene Linie um ein solches Stück zu verlängern, daß ein Rechteck zwischen der ganzen so verlängerten Linie und dem angesetzten Stücke, dem Quadrate einer gegebenen Linie gleich sey.

Aufl. Es ist eine Linie AB (Fig. 86) gegeben: man soll ihr ein Stück BC ansetzen, daß Rechteck $AC \times CB = mn^2$ sey.

Man setze AB = a, mn = b, BC = x: so ist AC = a + x, und man hat daher folgende Gleichung:

$$x (a + x) = b^2.$$

Die Auflösung giebt

$$x = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + b^2)}.$$

Constr. Man beschreibe über AB einen Halbkreis; errichte aus B das Perpendikel BE = mn, und ziehe aus dem Mittelpunkte O die Linie OE; an F, wo diese Linie den Halbkreis schneidet, ziehe man die Tangente FC, welche die verlängerte AB in C trifft: so ist BC das gesuchte Stück, um welches die AB verlängert werden muß.

Denn da, wie leicht einzusehen ist, $\triangle EOB \cong \triangle FOC$,

und $OE^2 = OB^2 + BE^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$: so ist $OC = OE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, und daher $BC = OC - OB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$.

Verlängert man die Linie BA nach der andern Seite, und macht $Oc = OC$, so hat man $Bc = OB + OC = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, welches der absolute Werth dieser Linie ist. In Hinsicht auf die Lage, ist aber Bc der BC entgegengesetzt, und man hat daher analytisch ausgedrückt $Bc = -\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, welches der zweyte Werth des x ist. Da in der Aufgabe nicht bestimmt worden, nach welcher Seite die Linie AB verlängert werden soll, so thun beyde Werthe des x derselben ein Genüge, indem $Bc \cdot cA = BC \cdot CA$. Wäre aber in der Aufgabe ausdrücklich bestimmt worden, daß diese Verlängerung nach der Seite von B zu geschehen solle: so dürfte nur der erste Werth des x beybehalten worden.

Der synthetische Beweis der Construktion gründet sich auf El. III. 36, und ist daraus leicht herzuleiten.

§ 74.

Aufg. Eine gegebene Linie so in zwey Theile zu theilen, daß das Rechteck zwischen dem einen Theile und einer zweyten gegebenen Linie, dem Quadrate des anderen Theiles gleich sey.

Aufl. Es sind (Fig. 87) zwey Linien AB, mn, gegeben: man soll die erstere so in D theilen, daß Rechteck $AD \times mn = BD^2$ sey.

Es sey $AB = a$, $mn = b$, $BD = x$: so ist $AD = a - x$, und man hat daher aus den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung,

$$(a - x)\, b = x^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt,

$$x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(ab + \tfrac{1}{4}b^2)}.$$

Constr. Auf der Verlängerung von AB nehme man BC = mn, und beschreibe über AC und BC zwey Halbkreise; aus B errichte man das Perpendikel BE und ziehe aus F, dem Mittelpunkte des Halbkreises BGC die Linie FE; an den Durchschnittspunkt G ziehe man die Tangente GD, welche die AB in D trifft: so ist D der verlangte Theilungspunkt.

Denn da $BE^2 = AB \times BC$ (El. VI. 13 und 17) $= ab$, und $BF = \tfrac{1}{2} BC = \tfrac{1}{2} b$: so ist $FE^2 = BE^2 + BF^2 = ab + \tfrac{1}{4} b^2$, und $FE = \sqrt{(ab + \tfrac{1}{4} b^2)}$. Aber $\triangle DFG \cong \triangle BFE$, und daher $DF = FE$; folglich ist auch $DF = \sqrt{(ab + \tfrac{1}{4} b^2)}$, und demnach $DB = DF - BF = \sqrt{(ab + \tfrac{1}{4} b^2)} - \tfrac{1}{2} b$, wie erfordert wird.

Der zweyte Werth des x kann hier, da er negativ ist, nicht gebraucht werden, weil sonst der Punkt D, welcher doch nach der Aufgabe ein Theilungspunkt der Linie AB seyn soll, jenseits des Punktes B, und also nicht zwischen A und B fallen würde.

Synth. Bew. Da $\triangle DFG \cong \triangle BFE$: so ist $BE = DG$. Nun ist $BE^2 = AB \times BC$ (El. VI. 13 und 17), $DG^2 = BD \times DC$ (El. III. 36); folglich ist auch $AB \times BC = BD \times DC$. Man nehme auf beyden Seiten das Rechteck $BD \times BC$ hinweg: so hat man, $(AB - BD)\, BC = (DC - BC)\, BD$, oder $AD \times BC = AD \times mn = BD^2$. W. Z. E. W.

§ 75.

Aufg. Es sollen zwey Linien von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß die Summe ihrer Quadrate einem gegebenen Quadrate, und das von ihnen eingeschlossene Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich sey.

Aufl. Es sey AC (Fig. 88) die Seite des gegebenen Quadrates $= a$; das gegebene Rechteck sey MG, seine Seiten, $MN = b$, $NG = c$. Die beyden gesuchten Linien sollen x und y heißen. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$xy = bc,\quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt,

$$x = \sqrt{[\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}]}$$

$$y = \sqrt{[\tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}]}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Construktion.

Constr. Man suche zu den drey gegebenen Linien AC, MN, NG, die vierte Proportionallinie (El. VI. 12); diese sey X, so daß $AC : MN = NG : X$. Man beschreibe hierauf über AC einen Halbkreis, und errichte aus C das Perpendikel $CD = X$; aus D ziehe man die DB der AC parallel, welche den Halbkreis in B trifft, und aus B die Linien BA, BC; diese werden die gesuchten seyn.

Man ziehe den Halbmesser OB und das Perpendikel BF. Da $AC : MN = NG : X$ (konstr.), oder $a : b = c : X$; so ist $X = CD = BF = \frac{bc}{a}$; folglich $OF = \sqrt{(OB^2 - BF^2)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$. Hieraus erhält man ferner: $AF = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$, $CF = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)}$. Da nun $AB^2 = AC \times AF = \tfrac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)} = \tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$, $BC^2 = AC \times CF = \tfrac{1}{2}a^2 - a\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}\right)} = \tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}$: so ist $AB = \sqrt{[\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}]}$, $BC = \sqrt{[\tfrac{1}{2}a^2 - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 - b^2c^2)}]}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Da ABC ein rechter Winkel ist: so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$, wodurch der ersten Forderung der Aufgabe Genüge geschiehet. Da fernor $AC : MN = NG : X$ ($= BF$): so ist Rechteck $AC \times BF =$ Rechteck $MN \times NG$. Nun ist aber Rechteck $AC \times BF =$ Rechteck $AB \times BC$, weil beyde Rechtecke doppelt so groß als das Dreyeck ABC sind; folglich ist auch Rechteck $AB \times BC =$ Recht. $MN \times NG$. W. Z. E. W.

Anmerk. Man kann auch, wie ich als bekannt voraussetzen darf, den analytischen Ausdrücken für x und y, folgende zur Berechnung bequemere Formen geben:

$$x = \tfrac{1}{2}[\sqrt{(a^2 + 2bc)} + \sqrt{(a^2 - 2bc)}]$$

$$y = \tfrac{1}{2}[\sqrt{(a^2 + 2bc)} - \sqrt{(a^2 - 2bc)}].$$

Jene in der Auflösung angegebene Formeln sind indessen zur Construktion geschickter.

§ 76.

Aufg. Ein rechtwinklichtes Dreyeck von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die Hypothenuse desselben einer gegebenen Linie, und das Rechteck zwischen seinen beyden Seiten dem Quadrate des Unterschiedes derselben gleich sey.

Aufl. ABC (Fig. 88) sey das gesuchte Dreyeck, dessen Hypothenuse $AC = a$ gegeben ist, und worin Rechteck $AB \times BC = (AB - BC)^2$.

Es sey $AB = x$, $BC = y$: so erhält man aus den Bedingungen der Aufgabe folgende zwey Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad xy = (x - y)^2;$$

und diese geben,

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{6}(3+\sqrt{5})}, \quad y = \sqrt{\frac{a^2}{6}(3-\sqrt{5})}.$$

Um diese für x und y gefundenen Ausdrücke zur Construktion einzurichten, gebe man ihnen folgende Formen:

$\sqrt{a[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}a^2)}]}$, $\sqrt{a[\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}a^2)}]}$.

Constr. Ueber die gegebene Hypothenuse $AC = a$, beschreibe man einen Halbkreis; aus C errichte man das Perpendikel $CD = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} a$, und ziehe aus D die DB der AC parallel, welche den Halbkreis in B trifft; von B ziehe man die Linien BA, BC: so wird ABC das gesuchte Dreyeck seyn.

Denn man ziehe den Halbmesser OB und das Perpendikel BF: so ist $BF = CD = \frac{1}{3} a$, $OB = \frac{1}{2} a$, folglich $OF = \sqrt{(OB^2 - BF^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} a^2)}$, und daher $AF = \frac{1}{2} a + \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} a^2)}$, $CF = \frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} a^2)}$. Da nun $AB^2 = AC \times AF$, $BC^2 = AC \times CF$: so ist, $AB = \sqrt{a[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}a^2)}]}$, $BC = \sqrt{a[\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}a^2)}]}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Da $\triangle ABC \sim \triangle BFC$: so ist $AB : AC = BF : BC$; folglich auch $3\,AB : AC = 3\,BF : BC = AC : BC$, und daher $3\,AB \times BC = AC^2$. Nun ist aber auch wegen des rechten Winkels ABC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$; man hat also $3\,AB \times BC = AB^2 + BC^2$, und $AB \times BC = AB^2 - 2\,AB \times BC + BC^2 = (AB - BC)^2$. W. Z. E. W.

§ 77.

Aufg. An dem einen Endpunkte des gegebenen Durchmessers eines Halbkreises ist ein Perpendikel errichtet: man soll auf diesem Perpendikel einen Punkt finden, so daß, wenn man von diesem Punkte nach dem anderen Endpunkte des Durchmessers eine Linie ziehet, der ausserhalb des Kreises liegende Theil derselben einer gegebenen Linie gleich sey.

Aufl. Es sey AB (Fig. 89) der gegebene Durchmesser eines Halbkreises, BC ein Perpendikel auf demselben: es wird

ein Punkt D gesucht, so daß, wenn man DA ziehet, DE einer gegebenen Linie mn gleich sey.

Man setze AB = a, mn = b, AD = x, und ziehe BE. Da AEB ein rechter Winkel ist: so ist △ ADB ∽ △ ABE, und daher,

$$AD : AB = AB : AE$$

oder

$$x : a = a : x - b.$$

Hieraus erhält man,

$$x^2 - bx = a^2,$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + a^2)}.$$

Constr. Man nehme auf BC, BH = mn = b, und beschreibe über BH einen Halbkreis BFH; durch den Mittelpunkt desselben O ziehe man aus A die Linie AF, und beschreibe mit AF einen Bogen, welcher die Linie BC in D schneidet: so wird D der gesuchte Punkt seyn.

Denn da AB = a, BO = $\frac{1}{2}$ BH = $\frac{1}{2}$ b: so ist AO = $\sqrt{(BO^2 + AB^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + a^2)}$; folglich AD = AF = AO + OF = $\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + a^2)}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Man vollende den Kreis BFHG. Da DB den Kreis AEB, und AB den Kreis BFHG berührt: so ist $BD^2 = AD \times DE$, $AB^2 = FA \times AG$; folglich, $AD \times DE + FA \times AG = BD^2 + AB^2 = AD^2$, und daher $FA \times AG = AD^2 - AD \times DE = AD \times AE$. Nun ist FA = AD; folglich ist auch AG = AE, und daher DE = GF, oder, da GF = BH = mn, DE = mn. W. Z. E. W.

§ 78.

Aufg. In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, der sowohl den Bogen, als die beyden Halbmesser berühre.

Aufl. ACB (Fig. 90) sey der gegebene Quadrant, der Halbmesser desselben = a. Es sey ferner EFG der gesuchte

Kreis, sein Mittelpunkt sey D, und seine Berührungspunkte mit dem Bogen und den beyden Halbmessern des Quadranten seyen E, F, G.

1) Man ziehe DF, DG: so sind DFB, DGB rechte Winkel (El. III. 18): auch ist ABC ein rechter Winkel; folglich BFDG ein Parallelogramm, und da auch DG = DF, ein Quadrat; daher DBC ein halber rechter Winkel. Man verlängere nun BD: so wird diese Linie durch den Punkt E gehen. (El. III. 11).

2) Man setze DE = DF = DG = x: so ist BD = $\sqrt{(BG^2 + DG^2)} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$; folglich BE = BD + DE = $x\sqrt{2} + x$. Da nun auch BE = a: so ist,

$$x\sqrt{2} + x = a,$$

und daher $$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = a(\sqrt{2} - 1),$$

oder auch $$x = \sqrt{2a^2} - a.$$

Hieraus ergiebt sich die folgende Construktion.

Constr. Man halbire den Winkel ABC durch die Linie BE; an E, wo diese Linie den Bogen AC trifft, ziehe man die Tangente EH, welche der verlängerten BA in H begegnet; mache hierauf BG = AH, und errichte aus G das Perpendikel GD; aus D, wo dieses Perpendikel die BE trifft, beschreibe man mit DG den Kreis EFG: so wird dies der gesuchte Kreis seyn.

Denn da BEH ein rechter, und EBH ein halber rechter Winkel ist: so ist BE = EH = a, und daher BH = $\sqrt{(BE^2 + EH^2)} = \sqrt{2a^2}$; folglich BG = AH = BH—BA = $\sqrt{2a^2} - a$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Man ziehe DF auf BC perpendikulär: so ist DFB = DGB, DBG = DBF, BD = BD; folglich $\triangle DGB \cong \triangle DFB$, und DF = DG; mithin gehet

der mit DG beschriebene Kreis durch F, und berührt die Linien BC, BA, in F und G (El. III. 16.) Da ferner HBE $= \frac{1}{2}$ R: so ist BE = EH; aber auch AH = BG (konstr.), folglich HG = AB = BE = EH, und daher △ HGE gleichschenklicht, und HGE = HEG. Nun ist aber auch DEH = DGH (= R); folglich ist DEG = DGE, und daher DG = DE. Der mit DG beschriebene Kreis gehet also auch durch E, und zwar wird er dem Bogen AB in keinem anderen Punkte begegnen, sonst würde eine aus B nach diesem Punkte gezogene Linie gleich BE seyn, welches unmöglich ist. (El. III. 8).

§ 79.

Aufg. Die Linien, welche von den spitzen Winkeln eines rechtwinklichten Dreyecks nach der Mitte der gegenüber liegenden Seiten gezogen worden, sind gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. Es soll ein rechtwinklichtes Dreyeck ABC (Fig. 91) von solcher Beschaffenheit gefunden werden, daß, wenn man die Katheten AB, BC, in D und E halbirt, und die Linien AE, CD, ziehet, AE = mn = a, und CD = pq = b sey.

Man setze BD = x: so ist $BC^2 = CD^2 - BD^2 = b^2 - x^2$; folglich $BE^2 = \frac{1}{4} BC^2 = \frac{b^2 - x^2}{4}$, und $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 4x^2 + \frac{b^2 - x^2}{4} = \frac{b^2 + 15x^2}{4}$. Da nun AE = a: so hat man die Gleichung

$$\frac{b^2 + 15x^2}{4} = a^2,$$

und hieraus $$x = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{15}}.$$

Constr.

Constr. Auf eine willkührliche Linie AB errichte man in B ein Perpendikel CZ, und mache BF $= \frac{1}{2}$ pq $= \frac{1}{2}$ b; aus F schneide man mit FG $=$ mn $=$ a die BZ in G; nehme auf BA ein willkührliches Stück Bk, schneide aus k mit kl $= 4$ Bk die BZ in l, und ziehe aus G die GH der kl parallel, welche die Linie BA in H trifft; hierauf schneide man aus H mit HE $= \frac{1}{2}$ pq $= \frac{1}{2}$ b die Linie BC in E, und mache BC $= 2$ BE, BA $= 4$ BH. Ziehet man nun AC: so ist ABC das verlangte Dreyeck.

Denn da FG $=$ a, BF $= \frac{1}{2}$ b (Constr.): so ist $BG^2 = FG^2 - BF^2 = a^2 - \frac{1}{4} b^2$. Ferner ist, weil $\triangle$ BHG $\backsim \triangle$ Bkl, GH : BH $=$ kl : Bk $= 4 : 1$ (Constr.), und daher GH $= 4$ BH, $GH^2 = 16\,BH^2$, $BG^2 = GH^2 - BH^2 = 15\,BH^2$; folglich $15\,BH^2 = a^2 - \frac{1}{4} b^2$, $BH^2 = \frac{a^2 - \frac{1}{4}b^2}{15}$; mithin, (weil $x = \frac{1}{2}$ AB $= 2$ BH), $x^2 = \frac{4a^2 - b^2}{15}$, und $x = \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{15}}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Man nehme BD $= 2$ BH $= \frac{1}{2}$ AB, und ziehe CD: so ist, da auch BC $= 2$ BE, CD $\#$ HE, und daher CD $= 2$ HE $=$ pq (Constr.); demnach hat die Linie CD, welche von C nach der Mitte von AB gezogen worden, die gegebene Größe. Da ferner, wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke Bkl, BGH, wie vorhin bewiesen worden, GH $= 4$ BH, und auch AB $= 4$ BH (Constr.): so ist AB $=$ GH, und daher $GB^2 = GH^2 - BH^2 = AB^2 - BH^2$. Es ist aber $AE^2 - HE^2 = AB^2 - BH^2$, (weil $AE^2 = AB^2 + BE^2$, $HE^2 = BH^2 + BE^2$), folglich ist $GB^2 = AE^2 - HE^2$. Nun ist aber auch $GB^2 = GF^2 - BF^2 = GF^2 - HE^2$, (weil nach der Constr. BF $= \frac{1}{2}$ pq $=$ HE); folglich hat man

$AE^2 - HE^2 = GF^2 - HE^2$, und daher $AE = GF$; mithin, da $GF = mn$ (Constr.), auch $AE = mn$. W. Z. E. W.

§ 80.

Aufg. Es ist ein Winkel und in demselben ein Punkt gegeben: man soll einen Kreis beschreiben, welcher die beyden Schenkel des Winkels berührt, und durch den gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Der gegebene Winkel sey BAC (Fig. 92), der gegebene Punkt sey D, PMD der gesuchte Kreis, welcher die Schenkel AB, AC in P und M berührt, und durch den Punkt D gehet.

1) Man ziehe durch den Mittelpunkt des Kreises O die Linie AE: so halbirt solche den Winkel BAC. Da ferner der Punkt D gegeben ist: so hat man auch den Winkel DAE und die Linie AD. Es sey daher $BAE = \alpha$, $DAE = \beta$, $AD = a$.

2) Wäre der Winkel ADO bekannt: so hätte man im Dreyecke ADO eine Seite und zwey Winkel, folglich auch die Linien AO, OD, und somit den Mittelpunkt und Halbmesser des Kreises. Dieser Winkel kann aber sehr leicht gefunden werden; denn da $AO : OP = AO : OD$, und $AO : OP = 1 : \text{Sin.}\,\alpha$, $AO : OD = \text{Sin. ADO} : \text{Sin.}\,\beta$: so ist

$$1 : \text{Sin.}\,\alpha = \text{Sin. ADO} : \text{Sin.}\,\beta,$$

und daher $$\text{Sin. ADO} = \frac{\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha}.$$

Hieraus ergiebt sich folgende sehr einfache Construktion.

Constr. Man halbire den Winkel BAC durch die Linie AE, und nehme darauf irgend einen Punkt F nach Willkühr an; ziehe aus diesem Punkte auf AC das Perpendikel FG, und schneide mit $FH = FG$ die Linie AD in H; aus D ziehe man hierauf DO der HF parallel: so ist O der Mittelpunkt des Kreises.

Denn da FH = FG (Constr.): so ist AF : FG = AF : FH. Aber AF : FG = 1 : Sin. α, AF : FH = Sin. AHF : Sin. β; folglich 1 : Sin. α = Sin. AHF : Sin. β, und daher Sin. AHF = Sin. ADO = $\frac{\text{Sin. }\beta}{\text{Sin. }\alpha}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Man ziehe OP auf AB perpendikulär: so ist OP ♯ FG, DO ♯ HF; folglich AF : FG = AO : OP, und AF : FH = AO : OD. Aber AF : FG = AF : FH, (weil FG = FH (nach der Constr.); folglich AO : OP = AO : OD, und demnach OP = OD. Ein Kreis mit OD beschrieben, wird demnach durch P gehen, und daselbst die Linie AB, folglich auch AC berühren.

Anmerk. Da es außer H immer noch einen Punkt auf der Linie AD giebt, wo FH = FG ist: so giebt es eigentlich zwey Kreise, welche der Aufgabe Genüge thun.

§ 81.

Aufg. Es ist ein Winkel, und innerhalb desselben ein Kreis gegeben: man soll einen anderen Kreis beschreiben, der die beyden Schenkel des gegebenen Winkels und den gegebenen Kreis zugleich berühre.

Aufl. Es sey BAC (Fig. 93) der gegebene Winkel, kl der gegebene Kreis, dessen Mittelpunkt O, und MLk der gesuchte Kreis, welcher die Schenkel AB, AC in M, L, und den Kreis in k berührt. Der Mittelpunkt D des gesuchten Kreises muß wieder wie im vorigen § in der Linie AD liegen, welche den Winkel BAC halbirt; ferner müssen die Mittelpunkte der beyden Kreise und der Berührungspunkt derselben in einer geraden Linie Dk liegen. (El. III. 11).

1) Man nehme auf AD irgend einen Punkt P an, und ziehe PO: so kann man außer dem Winkel BAC, und dem

Halbmesser Ok des gegebenen Kreises, auch noch die Linien AP, PO, und den Winkel OPD als gegeben ansehen. Es sey daher DAC $= \frac{1}{2}$ BDC $= \alpha$, OPD $= \beta$, AP $=$ a, PO $=$ b, Ok $=$ r.

2) Wäre der Winkel POD bekannt: so könnte man die Linie OD ziehen, und somit wäre der Mittelpunkt D bestimmt. Man setze daher POD $= \varphi$: so ist,

$$\text{DO} = \frac{\text{b Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)}, \text{ PD} = \frac{\text{b Sin. } \varphi}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)},$$

folglich
$$\text{Dk} = \text{DO} + \text{Ok} = \frac{\text{b Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)} + \text{r},$$

$$\text{AD} = \text{PD} + \text{AP} = \frac{\text{b Sin. } \varphi}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)} + \text{a}.$$

3) Nun ist Dk $=$ DM $=$ AD Sin. α; man hat also die Gleichung

$$\frac{\text{b Sin. } \beta}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)} + \text{r} = \left[\frac{\text{b Sin. } \varphi}{\text{Sin. } (\beta + \varphi)} + \text{a}\right] \text{Sin. } \alpha,$$

oder

$$\text{b Sin. } \beta + \text{r Sin. } (\beta + \varphi) = \text{b Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi + \text{a Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\beta + \varphi):$$

aus welcher Gleichung sich der Werth von φ bestimmen ließe.

4) Da der Punkt P nach Willkühr angenommen werden kann: so bestimme man ihn so, daß dadurch die gefundene Gleichung einfacher wird. Dies geschiehet, wenn man AP $=$ a $= \frac{\text{r}}{\text{Sin. } \alpha}$ setzt, denn dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$\text{Sin. } \beta = \text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \varphi,$$

und diese giebt $\text{Sin. } \varphi = \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha}$;

woraus man eine sehr leichte Construktion erhält.

Constr. Man halbire den gegebenen Winkel BAC durch

die Linie AT; aus A errichte man das Perpendikel Aa $=$ r, ziehe ab der AB parallel, und aus dem Punkte P, wo sie die Linie AT schneidet, die Linie PO nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises. Man nehme auf AT einen willkührlichen Punkt E an, ziehe EF auf ab perpendikulär, und schneide mit EG $=$ EF die Linie PO in G. Ziehet man nun durch O die Linie Dk der EG parallel: so ist der Punkt D, wo diese Linie die AT trifft, der Mittelpunkt, und Dk der Halbmesser des gesuchten Kreises.

Denn man hat AP $= \frac{Aa}{\text{Sin. } APa} = \frac{r}{\text{Sin. } \alpha}$, wie erfordert wird. Ferner ist, weil EF $=$ EG (Constr.), EF : EP $=$ EG : EP; aber EF : EP $=$ Sin. α : 1, EG : EP $=$ Sin. β : Sin. PGE; folglich ist Sin. α : 1 $=$ Sin. β : Sin. PGE, und daher Sin. PGE $=$ Sin. POD $= \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha}$.

Synth. Bew. Man ziehe DM auf AB perpendikulär: so ist Dca $=$ DMA $=$ R, folglich da auch EFP $=$ R (Constr.), Dc $\#$ EF. Nun ist auch DO $\#$ EG, mithin PE : EF $=$ PD : Dc, und PE : EG $=$ PD : DO. Aber PE : EF $=$ PE : EG (weil EF $=$ EG), folglich PD : Dc $=$ PD : DO, und daher Dc $=$ DO; und da auch cM $=$ Aa $=$ Ok: so ist DM $=$ Dk. Ein Kreis mit Dk beschrieben, gehet also durch M, und berührt die Linie AB, folglich auch AC. Daß aber die beyden Kreise sich in k berühren, erhellet daraus, daß sie keinen anderen Punkt gemeinschaftlich haben können, weil sonst eine von D nach diesem Punkte gezogene Linie der Dk gleich seyn müßte, welches unmöglich ist. (El. III. 8.)

Anmerk. Da es auf PO immer zwey Punkte wie G giebt, wo EG $=$ EF ist: so giebt es auch, wie im vorigen §, jedesmal zwey Kreise, welche der Aufgabe Genüge thun.

§ 82.

Aufg. Es ist ein Winkel, und innerhalb desselben ein Punkt gegeben: man soll durch diesen Punkt eine Linie ziehen, welche den beyden Schenkeln des Winkels begegne, und mit denselben ein Dreyeck von gegebenem Flächeninhalte mache.

Aufl. Es sey BAC (Fig. 94) der gegebene Winkel, und D der gegebene Punkt: man soll durch diesen Punkt eine Linie MN so ziehen, daß △ NAM einen gegebenen Flächeninhalt habe.

1) Man ziehe durch D eine Linie FG der AC parallel; so kann man die Linien AF, FD, als bekannt annehmen. Nun lege man an AF ein Parallelogramm AFGK, welches den gegebenen Flächeninhalt habe (El. I. 45): so beruhet die Auflösung der Aufgabe bloß darauf, die Linie MN so zu ziehen, daß △ NAM = Prlgr. AFGK sey.

2) Soll aber dies Letztere statt finden: so muß △ DGH = △ DNF + △ HKM seyn. Nun ist aber △ DGH : △ DNF = $DG^2 : DF^2$, und △ DGH : △ HKM = $DG^2 : KM^2$ (El. VI. 19); folglich ist auch △ DGH : △ DNF + △ HKM = $DG^2 : DF^2 + KM^2$, und da △ DGH = △ DNF + △ HKM, so ist auch $DG^2 = DF^2 + KM^2$, und daher,

$$KM = \sqrt{(DG^2 - DF^2)}.$$

Hieraus läßt sich nun, da die Linien DG, DF, bekannt sind, die Linie KM und somit auch der Punkt M, sowohl durch Rechnung als durch Zeichnung sehr leicht bestimmen.

Constr. Nachdem man an AF ein Parallelogramm AFGK gelegt hat, wie in der Auflösung angegeben worden, errichte man auf AC aus K das Perpendikel KL, und schneide mit LM = DG die Linie KC in M; ziehe hierauf aus M durch D die Linie MN: so ist das Verlangte geschehen.

Den Beweis findet man sehr leicht aus der Auflösung selbst.

§ 83.

Aufg. Es sind zwey unter rechten Winkeln sich schneidende Linien und ein Punkt gegeben, welcher von diesen beyden Linien gleich weit entfernt ist: man soll durch diesen Punkt eine Linie so ziehen, daß der zwischen den beyden Schenkeln eines der rechten Winkel enthaltene Theil derselben einer gegebenen Linie gleich sey.

Aufl. Die beyden Linien Bb, Cc (Fig. 95) schneiden sich in A unter rechten Winkeln; D sey ein Punkt von solcher Lage, daß die beyden Perpendikel DP, Dp einander gleich sind: man soll durch D eine Linie DM so ziehen, daß der Theil EM derselben, welcher zwischen den Schenkeln Ab, Ac liegt, der gegebenen Linie XZ gleich sey.

1) Könnte man die Linie DE oder DM bestimmen: so wäre die Aufgabe aufgelöst. Anstatt aber diese Linien selbst unmittelbar zu suchen, thut man besser, die Summe derselben für die unbekannte Größe in der Rechnung anzunehmen, da ihr Unterschied schon gegeben ist. Es sey daher $DP = Dp = a$, $DM - DE = XZ = 2b$, $DM + DE = 2x$: so ist $DM = x + b$, $DE = x - b$.

2) Da $\triangle DPE \backsim \triangle EAM$: so ist,

$$DE : DP = EM : AM$$

oder
$$x - b : a = 2b : AM;$$

und daher
$$AM = \frac{2ab}{x - b},$$

$$Mp = a + \frac{2ab}{x-b} = \frac{a(x+b)}{x-b}.$$

3) Nun ist $DM^2 = Mp^2 + Dp^2$; man hat also die Gleichung

$$(x+b)^2 = a^2 + \frac{a^2 (x+b)^2}{(x-b)^2},$$

oder $$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + b^4 - 2a^2b^2 = 0.$$

Diese biquadratische Gleichung ist eine quadratische für x^2; die Auflösung derselben giebt,

$$x = \pm \sqrt{[a^2 + b^2 \pm a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}]}.$$

4) Demnach hat x vier Werthe, welche die Aufgabe, so wie sie vorgetragen worden, vollständig auflösen. Denn da in derselben nicht bestimmt wurde, in welchem der vier rechten Winkeln das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück EM liegen soll: so kann diese Linie vier verschiedene Lagen haben; nämlich, entweder die Lage EM, innerhalb des Winkels bAc, wie bey der Auflösung angenommen worden, oder die Lage E′M′ innerhalb des Winkels BAC, oder auch die beyden Lagen E″M″, E‴M‴, innerhalb des Winkels bAC. Halbirt man die Linie EM in R: so ist $DR = \frac{1}{2}(DM + DE) = x$; halbirt man auch E′M′, E″M″, E‴M‴, in R′, R″, R‴: so sind DR′, DR″, DR‴, die drey anderen Werthe des x. Die Linien DR, DR′, sind in Ansehung ihrer absoluten Größe einander gleich, und bloß der Lage nach verschieden; diese sind durch die beyden Werthe $\pm\sqrt{[a^2 + b^2 + a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}]}$ gegeben. Eben so sind die Linien DR″, DR‴, bloß in Ansehung der Lage verschieden, und durch die beyden Werthe $\pm\sqrt{[a^2 + b^2 - a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}]}$ gegeben. Die beyden ersteren Werthe des x, welche den Linien DR, DR′ korrespondiren, sind immer möglich; die beyden letzteren nur alsdann, wenn $a^2 + b^2 > a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$, oder $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > a^4 + 4a^2b^2$, das ist $b^4 > 2a^2b^2$, und $b^2 > 2a^2$ ist.

Constr. Bb, Cc, (Fig. 96), seyen die beyden sich schneidenden Linien, D der gegebene Punkt, und $DP = Dp = a$,

zwey Perpendikel auf jener Linie gezogen. Man nehme auf Dp das Stück DS = XZ (vor. Figur) = 2b, und ziehe PS; nehme hierauf in der Verlängerung von DP, PT = PS, beschreibe über DT einen Halbkreis, welcher die Linie Cc in M schneidet, und ziehe DM: so wird das Stück EM, welches zwischen den beyden Schenkeln des Winkels bAC liegt, der gegebenen Linie XZ gleich seyn.

Denn da DP = a, DS = 2b; so ist $PS = \sqrt{(a^2 + 4b^2)}$, und daher $DT = DP + PT = DP + PS = a + \sqrt{(a^2 + 4b^2)}$. Man ziehe nun MT und das Perpendikel Mm. Da ∠ TMm = ∠ MDT, und DP = Mm: so sind die rechtwinklichten Dreyecke TMm, DPE, einander gleich, und daher MT = DE. Wird EM in R halbirt: so ist $DR = \frac{1}{2}(DM + DE) = \frac{1}{2}(DM + MT)$. Nun ist $DM^2 + MT^2 = DT^2$, und $DM \times MT = Mm \times DT = a.DT$, mithin $DM^2 + 2DM.MT + MT^2 = DT^2 + 2a.DT = DT(2a + DT) = [a + \sqrt{(a^2 + 4b^2)}] \times [3a + \sqrt{(a^2 + 4b^2)}] = 4a^2 + 4b^2 + 4a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}$, und daher $DM + MT = \sqrt{[4a^2 + 4b^2 + 4a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}]}$, $DR = \sqrt{[a^2 + b^2 + a\sqrt{(a^2 + 4b^2)}]}$, wie erfordert wird.

Synth. Bew. Da $EM^2 = AM^2 + AE^2$, und $AP^2 = (AE + EP)^2 = AE^2 + 2AE \times EP + EP^2$: so ist $AM^2 + 2AE^2 + 2AE \times EP + EP^2 = EM^2 + AP^2$, oder $AM^2 + 2PA \times AE + EP^2 = EM^2 + DP^2$. In den ähnlichen Dreyecken AEM, DEP, ist DP : AM = PE : AE; also ist $DP \times AE (= PA \times AE) = AM \times EP$. Man hat also $AM^2 + 2AM \times EP + EP^2 = EM^2 + DP^2$, oder $(AM + EP)^2 = EM^2 + DP^2$; folglich da AM = Pm, und EP = mT, $(Pm + mT)^2 = PT^2 = EM^2 + DP^2$. Nun ist aber auch $PT^2 = PS^2 = DS^2 + DP^2$; mithin ist $EM^2 + DP^2 =$

$DS^2 + DP^2$, daher $EM^2 = DS^2$, und $EM = DS$. W. Z. E. W.

Anmerk. Der Kreis schneidet die Linie Cc noch einmal in E'. Ziehet man durch diesen Punkt die Linie DM', welche der Bb in M' begegnet: so ist, wenn E'M' in R' halbirt wird, DR' der zweyte, durch die nämlichen Buchstaben in Fig. 95 bezeichnete Werth des x, und also = DR. Der Beweis hiervon ist sehr leicht zu finden. Für die beyden anderen Werthe des x läßt sich eine ähnliche Construktion finden, die ich, um Platz für andere Materien zu sparen, nicht hersetze.

VIII. Polygonometrische Aufgaben.

---

§ 84.

Erklärungen.

1) Wenn man aus allen Eckpunkten, desgleichen aus dem Anfangs- nnd Endpunkt einer gebrochenen Linie ABCDEFG (Fig. 97), auf eine nach Willkühr angenommene gerade Linie PQ, Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, Gg, herabläßt: so sollen hier diese Perpendikel Ordinaten heißen. Nimmt man ferner auf der Linie PQ irgend einen Punkt R nach Willkühr an: so sollen die Theile dieser Linie, welche zwischen diesem Punkte und den Ordinaten liegen, Abscissen heißen, und zwar Ra die Abscisse des Punktes A, Rb die Abscisse des Punktes B u. s. w.; ferner PQ die Abscissenlinie, R der Anfangspunkt der Abscissen; Abscisse und Ordinate eines Punktes zusammen Coordinaten dieses Punktes.

Sind die Coordinaten eines Punktes gegeben: so ist es auch der Punkt selbst. Die Ordinate eines Punktes kann aber sowohl dies- als jenseits der Linie PQ liegen; also reicht die Bestimmung der absoluten Größe der Ordinaten allein noch nicht hin; man muß noch überdies die Lage derselben wissen. Um die beyden erwähnten Lagen von einander zu unterscheiden, sollen die Ordinaten, welche über der Linie PQ liegen, durch +, diejenigen hingegen, welche unterhalb liegen, durch — bezeichnet werden. Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, haben demnach die Ordinaten, + Aa, + Bb, — Cc, + Dd, + Ee, + Ff, — Gg. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit den Abscissen: es sollen nämlich die Abscissen, welche von R nach der Seite von Q zu liegen, durch +, und die, welche nach der Seite von P liegen, durch — bezeichnet werden.

2) Die Linien AB, BC, CD, DE, EF, FG, aus welchen die gebrochene Linie ABCDEFG zusammen gesetzt ist, sollen die Theillinien derselben heißen. Schließt aber die gebrochene Linie einen Raum ein: so heißen jene Linien, wie bekannt, Seiten der dadurch gebildeten Figur. Soll eine Theillinie verlängert werden: so geschehe es, um Irrungen zu vermeiden, immer nach der Folge der Buchstaben, womit dieselbe bezeichnet ist. Man verlängere also, (wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gefordert wird,) die Linie AB, nicht nach der Seite von A, sondern nach der Seite von B; eben so die Linie BC, nicht nach der Seite von B, sondern nach der Seite von C; u. s. w. Zu dem Ende ist es rathsam, die gebrochene Linie, von ihrem ersten, bis zu ihrem letzten Punkte, durch die alphabetische Folge der Buchstaben zu bezeichnen.

3) Wenn man aus irgend einem Punkte R der Abscissenlinie, der nicht gerade der Anfangspunkt der Abscissen zu seyn braucht, einen Kreis beschreibt, und die Halbmesser Rα, Rβ,

$R\gamma$, $R\delta$, $R\epsilon$, $R\zeta$, nach der Ordnung, den Theillinien AB, BC, CD, DE, EF, FG, nach den Richtungen ihrer Verlängerungen parallel ziehet: so sollen diese Halbmesser die korrespondirenden Halbmesser jener Linien heißen, und zwar $R\alpha$ der k. H. von AB, $R\beta$ der k. H. von BC, u. s. w.

4) Aeußere Winkel einer gebrochenen Linie, sollen hier diejenigen Winkel heißen, welche an den Eckpunkten die Verlängerung der einen Theillinie mit der andern macht; also CB𝔄, DC𝔅, EDℭ, FE𝔇, GF𝔈.

Man weiß, daß, wenn zwey Linien, die ich M, N, nennen will, zweyen anderen, die P, Q, heißen mögen, parallel sind, nämlich M ⵐ P, N ⵐ Q, der Winkel, welchen die Linien M, N, bey ihrem Zusammentreffen machen, dem Winkel gleich ist, welchen die Linien P, Q, einschließen. Es muß daher auch der äußere Winkel zweyer Theillinien dem Winkel gleich seyn, welchen ihre korresp. Halbmesser mit einander machen; also 𝔄B𝔅 = $\alpha R\beta$, 𝔅Cℭ = $\beta R\gamma$, ℭD𝔇 = $\gamma R\delta$, 𝔇E𝔈 = $\delta R\epsilon$, 𝔈F𝔉 = $\epsilon R\zeta$.

Die absolute Größe der äußeren Winkel allein reicht aber noch nicht hin, um die Lage zweyer Theillinien zu bestimmen, indem diese sowohl einen konvexen als konkaven Winkel bilden können, ungeachtet der äußere Winkel von einerley Größe bleibt: es muß daher auch hierauf Rücksicht genommen werden. Zu dem Ende stelle man sich vor, ein beweglicher Halbmesser drehe sich um den Punkt R, rücke nach und nach in die Lagen $R\alpha$, $R\beta$, $R\gamma$, $R\delta$, $R\epsilon$, $R\zeta$, und beschreibe dadurch die Winkel $\alpha R\beta$ = 𝔄B𝔅, $\beta R\gamma$ = 𝔅Cℭ, $\gamma R\delta$ = ℭD𝔇, u. s. w.: so ist klar, daß dieser Halbmesser um aus $R\beta$ in $R\gamma$ zu rücken, eine Bewegung machen muß, welche in Ansehung der Richtung derjenigen gerade entgegen ist, wodurch er aus $R\alpha$ in $R\beta$ rückt. Siehet man daher die Winkel, welche durch eine

Drehung des beweglichen Halbmessers von der Gegend Q, nach den Gegenden X, P, Z, erzeugt worden, als positiv an: so müssen diejenigen Winkel, welche eine entgegengesetzte Bewegung erfordern, als negativ angesehen werden. Demnach müssen die Winkel BCC, DEE, EFF, das Zeichen +, und die Winkel ABB, CDD, das Zeichen — bekommen.

Die äußeren Winkel einer gebrochenen Linie ABB, BCC, CDD, DEE, EFF, mit dem ihnen zugehörigen Vorzeichen + oder —, sollen nach der Ordnung beständig durch die einzelnen Buchstaben B, C, D, E, F, bezeichnet werden; demnach ist in der vorliegenden Figur B = — ABB, C = + BCC, D = — CDD, E = + DEE, F = + EFF. Ferner soll der Winkel, welcher der erste korrespondirende Halbmesser und also auch die erste Theillinie mit der Abscissenlinie macht, hier qRα, durch A bezeichnet werden. Läge die Linie Rα jenseits der Linie rq, so wäre A = — qRα.

§ 85.

Aufg. Die Theillinien einer gebrochenen Linie, die äußeren Winkel derselben, und die Coordinaten des ersten Punktes nebst dem Winkel, welchen der erste korrespondirende Halbmesser mit der Abscissenlinie macht, sind gegeben: man soll die Coordinaten eines jeden Eckpunktes bestimmen.

Aufl. Es sey ABCDEFGHIK (Fig. 98) die gebrochene Linie, die Theillinien derselben AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, EF = e, FG = f, GH = g, HI = h, IK = i, KL = k; die korrespondirenden Halbmesser dieser Linien seyen nach der Ordnung Rα, Rβ, Rγ, Rδ, Rε, u. s. w. Ferner sey R der Anfangspunkt der Abscissen, die Abscisse des ersten Punktes Ra = p, die Ordinate desselben Aa = q.

1) Man ziehe aus den Punkten B, C, D, E, u. s. w.

auf die Abscissenlinie PQ, die Perpendikel Bb, Cc, Dd, Ee, u. s. w., und ihr parallel die Linien Ba', Bb', Cc', Ed', u. s. w. Man hat alsdann,

$$Aa = q$$
$$Bb = Aa - Aa' = q - a \, \text{Sin.} \, ABa' = q - a \, \text{Sin.} \, qR\alpha$$
$$Cc = Bb + Cb' = Bb + b \, \text{Sin.} \, CBb' = Bb + b \, \text{Sin.} \, qR\beta$$
$$Dd = Cc + Dc' = Cc + c \, \text{Sin.} \, DCc' = Cc + c \, \text{Sin.} \, pR\gamma$$
$$Ee = Dd - Dd' = Dd - d \, \text{Sin.} \, DEd' = Dd - d \, \text{Sin.} \, pR\delta$$
$$Ff = Ee - Ee' = Ee - e \, \text{Sin.} \, EFe' = Ee - e \, \text{Sin.} \, qR\varepsilon$$
$$Gg = Ff + Gf' = Ff + f \, \text{Sin.} \, GFf' = Ff + f \, \text{Sin.} \, qR\zeta$$
$$Hh = Gg - Gg' = Gg - g \, \text{Sin.} \, GHg' = Gg - g \, \text{Sin.} \, qR\eta$$
$$Ii = Hh + Ii' = Hh + h \, \text{Sin.} \, IHi' = Hh + h \, \text{Sin.} \, pR\vartheta$$
$$Kk = Ii + Kk' = Ii + i \, \text{Sin.} \, KIk' = Ii + i \, \text{Sin.} \, pR\iota$$
$$Ll = Kk - Kl' = Kk - k \, \text{Sin.} \, KLl' = Kk - k \, \text{Sin.} \, qR\varkappa,$$

ferner

$$Ra = p$$
$$Rb = Ra + ab = p + a \, \text{Cos.} \, ABa' = p + a \, \text{Cos.} \, qR\alpha$$
$$Rc = Rb + bc = Rb + b \, \text{Cos.} \, CBb' = Rb + b \, \text{Cos.} \, qR\beta$$
$$Rd = Rc - cd = Rc - c \, \text{Cos.} \, DCc' = Rc - c \, \text{Cos.} \, pR\gamma$$
$$Re = Rd - de = Rd - d \, \text{Cos.} \, DEd' = Rd - d \, \text{Cos.} \, pR\delta$$
$$Rf = Re + ef = Re + e \, \text{Cos.} \, EFe' = Re + e \, \text{Cos.} \, qR\varepsilon$$
$$Rg = Rf + fg = Rf + f \, \text{Cos.} \, GFf' = Rf + f \, \text{Cos.} \, qR\zeta$$
$$Rh = Rg + gh = Rg + g \, \text{Cos.} \, GHg' = Rg + g \, \text{Cos.} \, qR\eta$$
$$Ri = Rh - hi = Rh - h \, \text{Cos.} \, IHi' = Rh - h \, \text{Cos.} \, pR\vartheta$$
$$Rk = Ri - ik = Ri - i \, \text{Cos.} \, KIk' = Ri - i \, \text{Cos.} \, pR\iota$$
$$Rl = Rk + kl = Rk + k \, \text{Cos.} \, KLl' = Rk + k \, \text{Cos.} \, qR\varkappa.$$

2) Nun ist aber

$$\text{Sin.} \, A = \text{Sin.} - qR\alpha = - \text{Sin.} \, qR\alpha$$
$$\text{Sin.} \, (A + B) = \text{Sin.} \, (- qR\alpha + \alpha R\beta) = \text{Sin.} \, qR\beta$$
$$\text{Sin.} \, (A + B + C) = \text{Sin.} \, (- qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma) = \text{Sin.} \, qR\gamma = \text{Sin.} \, pR\gamma$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+D) = \text{Sin.}(-qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma + \gamma R\delta)$$
$$= \text{Sin.}\, q\overset{*}{R}\delta \text{ *)} = -\text{Sin.}\, pR\delta$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+D+E) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\, q\overset{*}{R}\varepsilon = -\text{Sin.}\, qR\varepsilon$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+D+E+F) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon + \varepsilon R\zeta \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\,(360^\circ + qR\zeta) = \text{Sin.}\, qR\zeta$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+\ldots+G) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon + \varepsilon R\zeta \\ - \zeta R\eta \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\, q\overset{*}{R}\eta = -\text{Sin.}\, qR\eta$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+\ldots+H) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qRa + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon + \varepsilon R\zeta \\ - \zeta R\eta + \eta R\theta \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\,(360^\circ + qR\theta) = \text{Sin.}\, qR\theta = \text{Sin.}\, pR\theta$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+\ldots+I) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon + \varepsilon R\zeta \\ - \zeta R\eta + \eta R\theta + \theta R\iota \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\,(360^\circ + qR\iota) = \text{Sin.}\, pR\iota$$

$$\text{Sin.}(A+B+C+\ldots+K) = \text{Sin.}\begin{bmatrix} -qR\alpha + \alpha R\beta + \beta R\gamma \\ + \gamma R\delta + \delta R\varepsilon + \varepsilon R\zeta \\ - \zeta R\eta + \eta R\theta + \theta R\iota \\ - \iota R\kappa \end{bmatrix}$$
$$= \text{Sin.}\, q\overset{*}{R}\kappa = -\text{Sin.}\, qR\kappa,$$

---

*) Das Sternchen über Sin. $qR\delta$ soll anzeigen, daß man unter $qR\delta$ nicht den konkaven, sondern den konvexen Winkel verstehen muß.

und eben so,

$$\text{Cos. } A = \text{Cos.} - qR\varkappa = \text{Cos. } qR\alpha$$

$$\text{Cos. } (A + B) = \text{Cos. } qR\beta$$

$$\text{Cos. } (A + B + C) = \text{Cos. } qR\gamma = - \text{Cos. } pR\gamma$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + D) = \text{Cos. } q\overset{*}{R}\delta = - \text{Cos. } pR\delta$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + D + E) = \text{Cos. } \overset{*}{q}R\varepsilon = \text{Cos. } qR\varepsilon$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + \ldots + F) = \text{Cos. } (360^\circ + qR\zeta) = \text{Cos. } qR\zeta$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + \ldots + G) = \text{Cos. } \overset{*}{q}R\eta = \text{Cos. } qR\eta$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + \ldots + H) = \text{Cos. } (360^\circ + qR\theta) = - \text{Cos. } pR\theta$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + \ldots + I) = \text{Cos. } (360^\circ + qR\;) = - \text{Cos. } pR\iota$$

$$\text{Cos. } (A + B + C + \ldots + K) = \text{Cos. } q\overset{*}{R}\varkappa = \text{Cos. } qR\varkappa.$$

3) Setzt man nun die in 2) gefundenen Werthe von Sin. $qR\alpha$, Sin. $qR\beta$, Sin. $pR\gamma$, Sin. $pR\delta$, u. s. w. Cos. $qR\alpha$, Cos. $qR\beta$, Cos. $pR\gamma$, Cos. $pR\delta$, u. s. w. in die Ausdrücke, welche in 1) für die Linien Aa, Bb, Cc, u. s. w. Ra, Rb, Rc, u. s. w. gefunden worden: so erhält man,

$$Aa = q$$

$$Bb = q + a \text{ Sin. } A$$

$$Cc = Bb + b \text{ Sin. } (A + B) = q + a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B)$$

$$Dd = Cc + c \text{ Sin. } (A + B + C) = q + a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B) + c \text{ Sin. } (A + B + C)$$

$$Ee = Dd + d \text{ Sin. } (A + B + C + D) = q + a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B) + c \text{ Sin. } (A + B + C) + d \text{ Sin. } (A + B + C + D)$$

$$Ff = Ee + e \text{ Sin. } (A + B + C + \ldots + E) = q + a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B) + c \text{ Sin. } (A + B + C) + d \text{ Sin. } (A + B + C + D) + e \text{ Sin. } (A + B + C + \ldots E)$$

. . .

. . .

. . .

$$Ll = Kk + k\,\text{Sin.}(A + B + C + \ldots + K) = q + a\,\text{Sin.}\,A$$
$$+ b\,\text{Sin.}(A+B) + c\,\text{Sin.}(A+B+C) + d\,\text{Sin.}(A+B+C+D)$$
$$+ e\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + E) + f\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + F)$$
$$+ g\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + G) + h\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + H)$$
$$+ i\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + I) + k\,\text{Sin.}(A + B + \ldots + K).$$

Eben so,

$$Ra = p$$
$$Rb = p + a\,\text{Cos.}\,A$$
$$Rc = p + a\,\text{Cos.}\,A + b\,\text{Cos.}(A + B)$$
$$Rd = p + a\,\text{Cos.}\,A + b\,\text{Cos.}(A+B) + c\,\text{Cos.}(A+B+C)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$Rl = p + a\,\text{Cos.}\,A + b\,\text{Cos.}(A+B) + c\,\text{Cos.}(A+B+C)$$
$$+ \ldots\ldots + k\,\text{Cos.}(A+B+C+\ldots\ldots+K).$$

Zus. Diese Formeln haben auch alsdann ihre Richtigkeit, wenn wie in Fig. 97 die gebrochene Linie von der Abscissenlinie durchschnitten wird, oder wenn der Anfangspunkt der Abscissen innerhalb der gebrochenen Linie liegt. Denn man darf sich nur vorstellen, die Abscissenlinie und der Anfangspunkt der Abscissen liege erst außerhalb der gebrochenen Linie, und dieser rücke mehr Rechts nach der Seite von Q, jene aber parallel mit sich selbst in die Höhe: so entstehet dadurch, weil die Winkel A, B, C, D, u. s. w. und die Theillinien a, b, c, d, u. s. w. dieselben bleiben, in den gefundenen Ausdrücken nur in so fern eine Aenderung, als die Coordinaten des ersten Punktes sich ändern. Sind daher diese der veränderten Lage gemäß gehörig bestimmt worden, so bleibt alles wie vorher.

Gehet die Abscissenlinie durch A, und nimmt man diesen

Punkt zugleich für den Anfangspunkt der Abscissen an: so ist $p = 0$, $q = 0$, und daher, wenn y irgend eine Ordinate, und x irgend eine Absciſſe bezeichnet,

$$y = a\,\text{Sin.}\,A + b\,\text{Sin.}\,(A+B) + c\,\text{Sin.}\,(A+B+C) + \text{ꝛc.}$$
$$x = a\,\text{Cos.}\,A + b\,\text{Cos.}\,(A+B) + c\,\text{Cos.}\,(A+B+C) + \text{ꝛc.}$$

Beysp. Es sey (Fig. 98) $a = 542$, $b = 698$, $c = 511$, $d = 469$, $e = 970$, $f = 902$, $g = 689$, $h = 660$, $i = 299$, $k = 783$, $p = 817$, $q = 711$; ferner $A = -47^\circ\,45'$, $B = +94^\circ\,31'$, $C = +66^\circ\,19'$, $D = +84^\circ\,15'$, $E = +92^\circ\,34'$, $F = +126^\circ\,32'$, $G = -115^\circ\,12'$, $H = +168^\circ\,49'$, $I = +33^\circ\,5'$, $K = -161^\circ\,50'$.

Hier ist

$\text{Sin.}\,A = \text{Sin.} -47^\circ\,45' = -\text{Sin.}\,47^\circ\,45'$,
$\text{Cos.}\,A = \text{Cos.} -47^\circ\,45' = \text{Cos.}\,47^\circ\,45'$;
$\text{Sin.}\,(A+B) = \text{Sin.}\,46^\circ\,46'$,
$\text{Cos.}\,(A+B) = \text{Cos.}\,46^\circ\,46'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+C) = \text{Sin.}\,113^\circ\,5' = \text{Sin.}\,66^\circ\,55'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+C) = \text{Cos.}\,113^\circ\,5' = -\text{Cos.}\,66^\circ\,55'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+C+D) = \text{Sin.}\,197^\circ\,20' = -\text{Sin.}\,17^\circ\,20'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+C+D) = \text{Cos.}\,197^\circ\,20' = -\text{Cos.}\,17^\circ\,20'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+\ldots+E) = \text{Sin.}\,289^\circ\,54' = -\text{Sin.}\,70^\circ\,6'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+\ldots+E) = \text{Cos.}\,289^\circ\,54' = \text{Cos.}\,70^\circ\,6'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+\ldots+F) = \text{Sin.}\,416^\circ\,26' = \text{Sin.}\,56^\circ\,26'$
$\text{Cos.}\,(A+B+\ldots+F) = \text{Cos.}\,416^\circ\,26' = \text{Cos.}\,56^\circ\,26'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+\ldots+G) = \text{Sin.}\,301^\circ\,14' = -\text{Sin.}\,58^\circ\,46'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+\ldots+G) = \text{Cos.}\,301^\circ\,14' = \text{Cos.}\,58^\circ\,46'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+\ldots+H) = \text{Sin.}\,470^\circ\,3' = \text{Sin.}\,69^\circ\,57'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+\ldots+H) = \text{Cos.}\,470^\circ\,3' = -\text{Cos.}\,69^\circ\,57'$;
$\text{Sin.}\,(A+B+\ldots+I) = \text{Sin.}\,503^\circ\,8' = \text{Sin.}\,36^\circ\,52'$,
$\text{Cos.}\,(A+B+\ldots+I) = \text{Cos.}\,503^\circ\,8' = -\text{Cos.}\,36^\circ\,52'$;

$\text{Sin.}\,(A + B + .. + K) = \text{Sin.}\, 341^\circ\, 18' = -\text{Sin.}\, 18^\circ\, 42'$,

$\text{Cos.}\,(A + B + .. + K) = \text{Cos.}\, 341^\circ\, 18' = \text{Cos.}\, 18^\circ\, 42'$.

Demnach hat man

$a\,\text{Sin.}\,A = -542\,\text{Sin.}\,47^\circ\,45' = -401{,}1981$

$b\,\text{Sin.}\,(A+B) = +698\,\text{Sin.}\,46^\circ\,46' = +508{,}5420$

$c\,\text{Sin.}\,(A+B+C) = +511\,\text{Sin.}\,66^\circ\,55' = +470{,}0870$

$d\,\text{Sin.}\,(A+B+C+D) = -469\,\text{Sin.}\,17^\circ\,20' = -139{,}7292$

$e\,\text{Sin.}\,(A+B+..+E) = -970\,\text{Sin.}\,70^\circ\,6' = -912{,}0794$

$f\,\text{Sin.}\,(A+B+..+F) = +902\,\text{Sin.}\,56^\circ\,26' = +751{,}5852$

$g\,\text{Sin.}\,(A+B+..+G) = -689\,\text{Sin.}\,58^\circ\,46' = -589{,}1382$

$h\,\text{Sin.}\,(A+B+..+H) = +660\,\text{Sin.}\,69^\circ\,57' = +619{,}9998$

$i\,\text{Sin.}\,(A+B+..+I) = +299\,\text{Sin.}\,36^\circ\,52' = +179{,}3865$

$k\,\text{Sin.}\,(A+B+..+K) = -783\,\text{Sin.}\,18^\circ\,42' = -251{,}0400$

$a\,\text{Cos.}\,A = +542\,\text{Cos.}\,47^\circ\,45' = +364{,}4228$

$b\,\text{Cos.}\,(A+B) = +698\,\text{Cos.}\,46^\circ\,46' = +478{,}1098$

$c\,\text{Cos.}\,(A+B+C) = -511\,\text{Cos.}\,66^\circ\,55' = -200{,}3475$

$d\,\text{Cos.}\,(A+B+C+D) = -469\,\text{Cos.}\,17^\circ\,20' = -447{,}7015$

$e\,\text{Cos.}\,(A+B+..+E) = +970\,\text{Cos.}\,70^\circ\,6' = +330{,}1681$

$f\,\text{Cos.}\,(A+B+..+F) = +902\,\text{Cos.}\,56^\circ\,26' = +498{,}7219$

$g\,\text{Cos.}\,(A+B+..+G) = +689\,\text{Cos.}\,58^\circ\,46' = +357{,}2633$

$h\,\text{Cos.}\,(A+B+..+H) = -660\,\text{Cos.}\,69^\circ\,57' = -226{,}2744$

$i\,\text{Cos.}\,(A+B+..+I) = -299\,\text{Cos.}\,36^\circ\,52' = -239{,}2101$

$k\,\text{Cos.}\,(A+B+..+K) = +783\,\text{Cos.}\,18^\circ\,42' = +741{,}6656$.

Hieraus ergiebt sich

$Bb = 711 - 401{,}1981 = 309{,}8019$

$Cc = Bb + 508{,}5420 = 818{,}3439$

$Dd = Cc + 470{,}0870 = 1288{,}4309$

$Ee = Dd - 139{,}7292 = 1148{,}7017$

$Ff = Ee - 912{,}0794 = 236{,}6223$

$Gg = Ff + 751{,}5852 = 988{,}2075$

$$Hh = Gg - 589{,}1382 = 399{,}0693$$
$$Ii = Hh + 619{,}9998 = 1019{,}0691$$
$$Kk = Ii + 179{,}3865 = 1198{,}4556$$
$$Ll = Kk - 251{,}0400 = 947{,}4156$$

und eben so, $Rb = 1181{,}4228$, $Rc = 1659{,}5326$, $Rd = 1459{,}1851$, $Re = 1011{,}4836$, $Rf = 1341{,}6517$, $Rg = 1840{,}3736$, $Rh = 2197{,}6369$, $Ri = 1971{,}3625$, $Rk = 1732{,}1524$, $Rl = 2473{,}8180$.

Anmerk. Sind die Coordinaten der gebrochenen Linie gefunden, so ist es leicht, diese Linie auf das Papier zu bringen. Die hier gefundenen Formeln machen übrigens die Basis der ganzen Polygonometrie aus, wie nun gezeigt werden soll.

§ 86.

Aufg. In einem Vierecke sind drey Seiten und die zwey zwischen diesen Seiten liegenden Winkel gegeben: man sucht die vierte Seite und die übrigen Winkel.

Aufl. ABCD (Fig. 99) sey das Viereck; AB, BC, CD, die gegebenen Seiten, und ABC, BCD, die gegebenen Winkel. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

1) Man sehe ABCD als eine gebrochene Linie an, welche sich in A zugleich anfängt und endigt, und ziehe durch diesen Punkt eine willkührliche Linie PQ, welche ihre Abscissenlinie seyn mag. Es sey A der Anfangspunkt der Abscissen, und um diesen Punkt ein Kreis beschrieben; $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, seyen die korrespondirenden Halbmesser der Seiten AB, BC, CD. Aus der Vergleichung mit Fig. 97 und 98 ergiebt sich alsdann $A = + QA\alpha$, $B = - \alpha A\beta = - \mathfrak{ABC}$, $C = - \beta A\gamma = - \mathfrak{BCD}$.

2) Man ziehe auf PQ das Perpendikel Dd: so ist nach § 85, wenn man der Kürze wegen $A = \alpha$, $A + B = \beta$, $A + B + C = \gamma$ setzt,

$$Dd = a \text{ Sin. } \alpha + b \text{ Sin. } \beta + c \text{ Sin. } \gamma;$$

$$Ad = a \text{ Cos. } \alpha + b \text{ Cos. } \beta + c \text{ Cos. } \gamma;$$

folglich,

$$Dd^2 = a^2 \text{ Sin. } \alpha^2 + b^2 \text{ Sin. } \beta^2 + c^2 \text{ Sin. } \gamma^2 + 2\,ab \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \beta + 2\,ac \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma + 2\,bc \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma$$

$$Ad^2 = a^2 \text{ Cos. } \alpha^2 + b^2 \text{ Cos. } \beta^2 + c^2 \text{ Cos. } \gamma^2 + 2\,ab \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \beta + 2\,ac \text{ Cos. } \alpha \text{ Cos. } \gamma + 2\,bc \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. } \gamma.$$

Hieraus erhält man nun, weil $AD = \sqrt{(Dd^2 + Ad^2)}$,

$$AD = \sqrt{\left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab \text{ Cos. } (\beta - \alpha) \\ + 2\,ac \text{ Cos. } (\gamma - \alpha) + 2\,bc \text{ Cos. } (\gamma - \beta) \end{array}\right]}$$

(§. 1 und 10.),

oder, da $\beta - \alpha = B$, $\gamma - \alpha = B + C$, $\gamma - \beta = C$,

$$AD = \sqrt{\left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab \text{ Cos. } B \\ + 2\,ac \text{ Cos. } (B + C) + 2\,bc \text{ Cos. } C \end{array}\right]};$$

ein Ausdruck, der von dem Winkel A nicht abhängt, wie auch seyn muß.

3) Man muß nun noch die beyden Winkel BAD, ADC, oder auch nur einen derselben bestimmen, weil man alsdann schon drey Winkel und folglich auch den vierten kennt. Zu dem Ende stelle man sich vor, die Linie PQ drehe sich um den Punkt A, und rücke in AD: so hat man,

$$Dd = a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B) + c \text{ Sin. } (A + B + C) = 0,$$

wo $A = DAB$ ist.

4) Aus dieser Gleichung erhält man durch die Entwickelung (§. 9)

$$\left[\begin{array}{l} a \text{ Sin. } A + b\,[\text{Sin. } A \text{ Cos. } B + \text{Cos. } A \text{ Sin. } B] \\ + c\,[\text{Sin. } A \text{ Cos. } (B + C) + \text{Cos. } A \text{ Sin. } (B + C)] \end{array}\right] = 0,$$

und durch die Division mit Sin. A,

$$\left[\begin{array}{l} a + b\,[\text{Cos. } B + \text{Cot. } A \text{ Sin. } B] \\ + c\,[\text{Cos. } (B + C) + \text{Cot. } A \text{ Sin. } (B + C)] \end{array}\right] = 0;$$

hieraus ferner,

$$\text{Cot. A} = \text{Cot. DAB} = -\frac{a + b\,\text{Cos. B} + c\,\text{Cos. }(B + C)}{b\,\text{Sin. B} + c\,\text{Sin. }(B + C)}.$$

5) Hätte man die Linie PQ nach der Seite von P sich so drehen lassen, daß sie auf AB fällt: so hätte man A = QAα = 180°. Bey dieser Voraussetzung gehet die Linie Dd in Dd′ über, und die Linie Ad in — Ad′. Die beyden Gleichungen,

$$Dd = a\,\text{Sin. A} + b\,\text{Sin. }(A + B) + c\,\text{Sin. }(A + B + C)$$
$$Ad = a\,\text{Cos. A} + b\,\text{Cos. }(A + B) + c\,\text{Cos. }(A + B + C)$$

verwandeln sich in folgende:

$$Dd' = a\,\text{Sin. }180^\circ + b\,\text{Sin. }(180^\circ + B) + c\,\text{Sin. }(180^\circ + B + C)$$
$$-Ad' = a\,\text{Cos. }180^\circ + b\,\text{Cos. }(180^\circ + B) + c\,\text{Cos. }(180^\circ + B + C)$$

oder,

$$Dd' = -\,b\,\text{Sin. B} - c\,\text{Sin. }(B + C)$$
$$Ad' = a + b\,\text{Cos. B} + c\,\text{Cos. }(B + C).$$

Hieraus erhält man wie in 4

$$\text{Cot. DAB} = \frac{Ad'}{Dd'} = -\frac{a + b\,\text{Cos. B} + c\,\text{Cos. }(B + C)}{b\,\text{Sin. B} + c\,\text{Sin. }(B + C)}.$$

6) Hat man die Seite AD schon berechnet: so kann auch die folgende Formel zur Bestimmung des Winkels DAB gebraucht werden:

$$\text{Sin. DAB} = \frac{Dd'}{AD} = -\frac{b\,\text{Sin. B} + c\,\text{Sin. }(B + C)}{AD}.$$

Beysp. Es sey AB = a = 452, BC = b = 610, CD = c = 411, ABC = 92° 5′, BCD = 68° 53′. Hier ist B = — ABC = — 87° 55′, C = — BCD = — 111° 7′, und daher B + C = — 199° 2′; man hat also, Cos. B Cos. — 87° 55′ = Cos. 87° 55′, Cos. C = Cos. — 111° 7′ = Cos. 111° 7′ = — Cos. 68° 53′, Cos. (B + C) = Cos. — 199° 2′ = Cos. 199° 2′ = — Cos. 19° 2′, Sin. B = Sin. — 87° 55′

$= - \text{Sin. } 87^\circ\, 55'$, $\text{Sin. } (B + C) = \text{Sin. } - 199^\circ\, 2' = - \text{Sin. } 199^\circ\, 2' = \text{Sin. } 19^\circ\, 2'$;

$$a^2 + b^2 + c^2 = 745325$$
$$2\,ab\,\text{Cos. } B = 20046{,}5$$
$$2\,ac\,\text{Cos. } (B + C) = -351231{,}3$$
$$2\,bc\,\text{Cos. } C = -180645{,}6;$$

folglich nach der Formel in 2,

$$AD = \sqrt{(745325 + 20046{,}5 - 351231{,}3 - 180645{,}6)} = 483{,}2127.$$

Man hat ferner,

$$b\,\text{Cos. } B = 22{,}1753,\quad b\,\text{Sin. } B = -609{,}5966$$
$$c\,\text{Cos. } (B+C) = -388{,}5302,\quad c\,\text{Sin. } (B+C) = 134{,}0346;$$

folglich,

$$a + b\,\text{Cos. } B + c\,\text{Cos. } (B + C) = 85{,}6451$$
$$b\,\text{Sin. } B + c\,\text{Sin. } (B + C) = -475{,}5620;$$

daher nach der Formel in 4 und 5,

$$\text{Cot. } DAB = \frac{85{,}6451}{475{,}5620} = 0{,}1800924$$

und $DAB = 79^\circ\, 47'\, 26''$.

Nach der Formel in 6 hat man,

$$\text{Sin. } DAB = \frac{475{,}5620}{483{,}2127} = 0{,}9841670$$

und $DAB = 79^\circ\, 47'\, 26''$

wie vorher.

Nachdem der Winkel DAB gefunden worden, hat man auch ADC: es ist nämlich,

$$ADC = 360^\circ - ABC - BCD - BAD = 119^\circ\, 14'\, 34''.$$

§ 87.

Aufg. Vier Seiten eines Fünfecks und die drey von ihnen eingeschlossenen Winkel sind gegeben: man soll die fünfte Seite und die beyden übrigen Winkel desselben bestimmen.

Aufl. ABCDE (Fig. 100) sey das Fünfeck, AB, BC, CD, DE, die gegebenen Seiten, und ABC, BCD, CDE, die gegebenen Winkel. Es sey AB $=$ a, BC $=$ b, CD $=$ c, DE $=$ d.

1) Durch A, den einen Endpunkt der gesuchten Linie AE, sey die willkührliche Linie PQ gezogen, und aus dem anderen Endpunkt E das Perpendikel Ee. Es sey ferner um A ein Kreis beschrieben, und $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, seyen nach der Ordnung die korresp. Halbmesser von AB, BC, CD, DE. Aus der gegenseitigen Lage dieser Halbmesser ergiebt sich für die vorliegende Figur, $A = +QA\alpha$, $B = -\alpha AB = -\mathfrak{A}BC$, $C = +\beta A\gamma = +\mathfrak{B}CD$, $D = -\gamma A\delta = -\mathfrak{C}DE$.

2) Nach § 84 ist in der gebrochenen Linie ABCDEA, wenn man der Kürze wegen $A = \alpha$, $A+B = \beta$, $A+B+C = \gamma$, $A+B+C+D = \delta$ setzt,

$$Ee = a\,\text{Sin.}\,\alpha + b\,\text{Sin.}\,\beta + c\,\text{Sin.}\,\gamma + d\,\text{Sin.}\,\delta$$
$$Ae = a\,\text{Cos.}\,\alpha + b\,\text{Cos.}\,\beta + c\,\text{Cos.}\,\gamma + d\,\text{Cos.}\,\delta,$$

und daher,

$$\begin{aligned} Ee^2 = {} & a^2\,\text{Sin.}\,\alpha^2 + b^2\,\text{Sin.}\,\beta^2 + c^2\,\text{Sin.}\,\gamma^2 + d^2\,\text{Sin.}\,\delta^2 \\ & + 2ab\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\beta + 2ac\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma + 2ad\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\delta \\ & + 2bc\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\gamma + 2bd\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\delta + 2cd\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Sin.}\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ae^2 = {} & a^2\,\text{Cos.}\,\alpha^2 + b^2\,\text{Cos.}\,\beta^2 + c^2\,\text{Cos.}\,\gamma^2 + d^2\,\text{Cos.}\,\delta^2 \\ & + 2ab\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\beta + 2ac\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\gamma + 2ad\,\text{Cos.}\alpha\,\text{Cos.}\delta \\ & + 2bc\,\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\gamma + 2bd\,\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}\delta + 2cd\,\text{Cos.}\gamma\,\text{Cos.}\delta. \end{aligned}$$

3) Da nun $AE = \sqrt{(Ee^2 + Ae^2)}$: so ist, (§. 1 und 10),

$$AE = \sqrt{\left[\begin{array}{c} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab\,\text{Cos.}\,(\beta - \alpha) + \\ 2ac\text{Cos.}(\gamma - \alpha) + 2ad\text{Cos.}(\delta - \alpha) + 2bc\text{Cos.}(\gamma - \beta) \\ + 2bd\,\text{Cos.}\,(\delta - \beta) + 2cd\,\text{Cos.}\,(\delta - \gamma) \end{array}\right]}$$

oder, da $\beta - \alpha = B$, $\gamma - \alpha = B + C$, $\delta - \alpha = B + C + D$, $\gamma - \beta = C$, $\delta - \beta = C + D$, $\delta - \gamma = D$,

$$AE = \sqrt{\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + 2\,ab\,\text{Cos.}\,B + 2\,ac\,\text{Cos.}\,(B+C) \\ + 2\,ad\,\text{Cos.}\,(B+C+D) + 2\,bc\,\text{Cos.}\,C + \\ 2\,bd\,\text{Cos.}\,(C+D) + 2\,cd\,\text{Cos.}\,D \end{bmatrix}}$$

4) Man lasse nun die Linie PQ sich, nach der Seite von P zu, so drehen, daß sie auf AB zu liegen kommt: so wird $A = 180°$, und Ee gehet in Ee′ über. Man hat also,

$$Ee' = a\,\text{Sin.}\,180° + b\,\text{Sin.}\,(180° + B) + c\,\text{Sin.}\,(180° + B + C) + d\,\text{Sin.}\,(180° + B + C + D),$$

oder,

$$Ee' = -b\,\text{Sin.}\,B - c\,\text{Sin.}\,(B+C) - d\,\text{Sin.}\,(B+C+D).$$

Da nun $\text{Sin.}\,BAE = \text{Sin.}\,EAe' = \frac{Ee'}{AE}$: so ist,

$$\text{Sin.}\,BAE = -\frac{b\,\text{Sin.}\,B + c\,\text{Sin.}\,(B+C) + d\,\text{Sin.}\,(B+C+D)}{AE}.$$

Hat man demnach, vermittelst der Formel in 3, die Seite AE schon berechnet: so erhält man aus dieser Formel den Winkel BAE.

5) Läßt man aber die Linie PQ, nach der Seite von Q, sich in die Lage AE drehen: so wird $A = BAE$, und $Ee = 0$, und man hat die Gleichung,

$$\begin{bmatrix} a\,\text{Sin.}\,A + b\,\text{Sin.}\,(A+B) + c\,\text{Sin.}\,(A+B+C) \\ + d\,\text{Sin.}\,(A+B+C+D) \end{bmatrix} = 0,$$

oder,

$$\begin{bmatrix} a\,\text{Sin.}\,A + b\,[\text{Sin.}\,A\,\text{Cos.}\,B + \text{Cos.}\,A\,\text{Sin.}\,B] + \\ c\,[\text{Sin.}\,A\,\text{Cos.}\,(B+C) + \text{Cos.}\,A\,\text{Sin.}\,(B+C)] + \\ d\,[\text{Sin.}\,A\,\text{Cos.}\,(B+C+D) + \text{Cos.}\,A\,\text{Sin.}\,(B+C+D)] \end{bmatrix} = 0.$$

Man dividire diese Gleichung durch Sin. A, setze Cot. A für $\frac{\text{Cos.}\,A}{\text{Sin.}\,A}$, und ziehe Cot. A = Cot. BAE heraus: dies giebt,

$$\text{Cot.}\,BAE = -\frac{a + b\,\text{Cos.}\,B + c\,\text{Cos.}\,(B+C) + d\,\text{Cos.}\,(B+C+D)}{b\,\text{Sin.}\,B + c\,\text{Sin.}\,(B+C) + d\,\text{Sin.}\,(B+C+D)}$$

oder auch,

$$\text{Tang. BAE} = -\frac{b\,\text{Sin.}\,B + c\,\text{Sin.}\,(B+C) + d\,\text{Sin.}\,(B+C+D)}{a + b\,\text{Cos.}\,B + c\,\text{Cos.}\,(B+C) + d\,\text{Cos.}\,(A+C+D)}.$$

Man hat also zwey verschiedene Formeln für den Winkel BAE, welche einander wechselseitig zur Prüfung der Rechnung dienen können.

Beysp. Es sey a = 540, b = 519, c = 438, d = 536, ABC = 46° 38′, BCD = 136° 5′, CDE = 38° 51′; also B = − 133° 22′, C = 43° 55′, D = − 141° 9′. Hier ist Sin. B = Sin. − 133° 22′ = − Sin. 133° 22′ = − Sin. 46° 38′, Cos. B = Cos. − 133° 22′ = Cos. 133° 22′ = − Cos. 46° 38′, Cos. C = Cos. 43° 55′, Cos. D = Cos. − 141° 9′ = Cos. 141° 9′ = − Cos. 38° 51′, Sin. (B + C) = Sin. − 89° 27′ = − Sin. 89° 27′, Cos. (B + C) = Cos. − 89° 27′ = Cos. 89° 27′, Sin. (B + C + D) = Sin. − 230° 36′ = − Sin. 230° 36′ = Sin. 50° 36′, Cos. (B + C + D) = Cos. − 230° 36′ = Cos. 230° 36′ = − Cos. 50° 36′, Cos. (C + D) = Cos. − 97° 14′ = Cos. 97° 14′ = − Cos. 82° 46′; folglich,

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	=	1040101
2 ab Cos. B	= −	384889,4
2 ac Cos. (B + C)	=	4540,8
2 ad Cos. (B+C+D)	= −	367432,8
2 bc Cos. C	=	327502,5
2 bd Cos. (C + D)	= −	70052,5
2 cd Cos. D	= −	365670,3;

und daher AE = $\sqrt{184099{,}3}$ = 429,0679.

Ferner ist

b Sin. B	=	−377,2996
b Cos. B	=	−356,3790
c Sin. (B + C)	=	−437,9797
c Cos. (B + C)	=	4,2044

$$d\,\text{Sin.}\,(B+C+D) = 414{,}1852$$
$$d\,\text{Cos.}\,(B+C+D) = -340{,}2155,$$

daher nach der Formel in 4,

$$\text{Sin. BAE} = \frac{401{,}0941}{429{,}0679} = 0{,}9348033$$

und nach der Formel in 5,

$$\text{Cot. BAE} = -\frac{152{,}3901}{401{,}0941} = -0{,}3799360.$$

Aus beyden ergiebt sich,

$$\text{BAE} = 110^\circ\ 48'\ 13''.$$

Die negative Cotagente, welche man durch die zweyte Formel erhält, zeigt, daß der Winkel stumpf sey, welches die erste unentschieden läßt, indem zu jedem Sinus zwey Winkel gehören.

Nachdem BAE gefunden worden, hat man auch den Winkel AED.

§ 88.

Aufg. Alle Seiten eines Vielecks weniger eine, wie auch alle von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel, sind gegeben: man soll die unbekannte Seite und die noch übrigen beyden Winkel finden.

Aufl. Die Behandlung des Vier- und Fünfecks in § 86 und 87, giebt deutlich zu erkennen, wie man für jedes andere Vieleck zu verfahren habe. Das Gesetz, nach welchem die Formeln fortgehen, ist einfach und leicht zu entdecken; es läßt sich auf die folgende Art durch Worte ausdrücken.

1) Um die unbekannte Seite des Vielecks zu finden, nehme man die Quadrate aller gegebenen Seiten; nehme ferner die doppelten Produkte je zweyer dieser Seiten, nach allen möglichen Combinationen, und multiplicire jedes derselben mit dem Cosinus der algebraischen Summe

der zwischen den respektiven Seiten liegenden äußeren Winkel; addire hieraus alles zusammen, und ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel.

2) Um einen der beyden gesuchten Winkel des Vielecks zu finden, nehme man die gegebene Linie, welche an dem gesuchten Winkel liegt, für die erste an, und multiplicire jede der übrigen gegebenen Seiten sowohl mit dem Sinus, als mit dem Cosinus der algebraischen Summe aller zwischen derselben und jener ersten Seite liegenden äußeren Winkel; addire alle aus den Cosinussen entstandene Produkte zur ersten Seite, und dividire die Summe durch die Summe aller aus den Sinussen entstandenen Produkte; der Quotient, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, giebt die Cotangente des gesuchten Winkels. Oder, man dividire die Summe der aus den Sinussen entstandenen Produkte durch die nach dem ersten Satze gefundene Seite: so giebt der Quotient, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, den Sinus des gesuchten Winkels.

Wenn also z. B. a, b, c, d, e, die fünf gegebenen, in eben der Ordnung auf einander folgenden Seiten eines Sechsecks sind, und B, C, D, E, die vier gegebenen, von diesen Seiten gebildeten, äußeren Winkel: so ist die unbekannte Seite =

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{c} a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab\,\mathrm{Cos.}\,B+2ac\,\mathrm{Cos.}\,(B+C) \\ +2ad\,\mathrm{Cos.}\,(B+C+D)+2ae\,\mathrm{Cos.}\,(B+C+D+E) \\ +2bc\,\mathrm{Cos.}\,C+2bd\,\mathrm{Cos.}(C+D)+2be\,\mathrm{Cos.}(C+D+E) \\ +2cd\,\mathrm{Cos.}\,D+2ce\,\mathrm{Cos.}\,(D+E)+2de\,\mathrm{Cos.}\,E \end{array}\right\}}$$

und die Cotangente des an der Seite a liegenden gesuchten Winkels =

$$= \frac{\left[\begin{array}{c} a + b\,\text{Cos.}\,B + c\,\text{Cos.}\,(B + C) + d\,\text{Cos.}\,(B + C + D) + \\ e\,\text{Cos.}\,(B + C + D + E) \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{c} b\,\text{Sin.}\,B + c\,\text{Sin.}\,(B + C) + d\,\text{Sin.}\,(B + C + D) + \\ e\,\text{Sin.}\,(B + C + D + E) \end{array}\right]}$$

oder der Sinus dieses Winkels =

$$= \frac{\left[\begin{array}{c} b\,\text{Sin.}\,B + c\,\text{Sin.}\,(B + C) + d\,\text{Sin.}\,(B + C + D) + \\ e\,\text{Sin.}\,(B + C + D + E) \end{array}\right]}{x}$$

wenn x die gesuchte Seite bezeichnet.

Daß sich diese Formeln auch auf das Dreyeck anwenden lassen, und daß man daraus die bekannten trigonometrischen Sätze ableiten könnte, verstehet sich wohl von selbst; ausgeführt findet man dies in Däzel's Anfangsgr. der Goniometrie; München, 1800.

§ 89.

Aufg. In einem Vielecke sind alle Seiten weniger zwey, und alle Winkel gegeben: man soll die beyden unbekannten Seiten finden.

Aufl. Es sey z. B. ABCDEF (Fig. 101) ein Sechseck, worin alle Winkel, wie auch alle Seiten, die beyden AF, CD, ausgenommen, bekannt sind.

1) Man ziehe durch A eine willkührliche Abscissenlinie PQ, und Ff darauf perpendikulär: so ist, wenn man ABCDEF als eine gebrochene Linie ansiehet, nach § 85,

$$\begin{aligned} Ff = {} & AB\,\text{Sin.}\,A + BC\,\text{Sin.}\,(A + B) + CD\,\text{Sin.}\,(A + B + C) \\ & + DE\,\text{Sin.}\,(A + B + C + D) + EF\,\text{Sin.}\,(A + B + C + D + E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Af = {} & AB\,\text{Cos.}\,A + BC\,\text{Cos.}\,(A + B) + CD\,\text{Cos.}\,(A + B + C) \\ & + DE\,\text{Cos.}\,(A + B + C + D) + EF\,\text{Cos.}\,(A + B + C + D + E) \end{aligned}$$

worin A = QAB.

2) Man lasse nun die Linie PQ sich nach der Seite von Q so drehen, daß sie auf AF fällt: so wird $Ff = o$, und $Af = AF$, und man hat anstatt der beiden vorigen Gleichungen, folgende:

$$o = AB \sin. A + BC \sin. (A+B) + CD \sin. (A+B+C) + DE \sin. (A+B+C+D) + EF \sin. (A+B+C+D+E)$$

$$AF = AB \cos. A + BC \cos. (A+B) + CD \cos. (A+B+C) + DE \cos. (A+B+C+D) + EF \cos. (A+B+C+D+E),$$

worin $A = FAB$.

3) Aus der ersten von diesen beyden Gleichungen erhält man

$$CD = \frac{-\left[\begin{array}{c} AB \sin. A + BC \sin. (A+B) + DE \sin. (A+B+C+D) \\ + EF \sin. (A+B+C+D+E) \end{array}\right]}{\sin. (A+B+C)}$$

Hat man hieraus CD bestimmt: so giebt die zweyte Gleichung die Linie AF.

Beysp. Es sey $AB = 1040$, $BC = 624$, $DE = 533$, $EF = 481$; $ABC = 23^\circ 52'$, $BCD = 69^\circ 14'$, $CDE = 30^\circ 24'$, $DEF = 115^\circ 30'$, $AFE = 46^\circ 44'$, und folglich $BAF = 83^\circ 44'$. Es seyen $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, $A\varepsilon$, nach der Ordnung, die corresp. Halbm. der Seiten AB, BC, CD, DE, EF: so ergiebt sich aus der Lage dieser Linien gegen einander, und gegen AF, worin PQ gerückt ist, $A = FA\alpha = 83^\circ 44'$, $B = -\alpha A\beta = -156^\circ 8'$, $C = \beta A\gamma = 110^\circ 46'$, $D = -\gamma A\delta = -149^\circ 36'$, $E = \delta A\varepsilon = 64^\circ 30'$. Man hat also $\sin. (A+B) = \sin. -72^\circ 24' = -\sin. 72^\circ 24'$, $\cos. (A+B) = \cos. -72^\circ 24' = \cos. 72^\circ 24'$, $\sin. (A+B+C) = \sin. 38^\circ 22'$, $\cos. (A+B+C) = \cos. 38^\circ 22'$, $\sin. (A+B+C+D) = \sin. -111^\circ 14' = -\sin. 68^\circ 46'$, $\cos. (A+B+C+D) = \cos. -111^\circ 14' = -\cos. 68^\circ 46'$, $\sin. (A+B+\ldots+E)$

$= \text{Sin.} - 46^\circ\, 44' = - \text{Sin.}\, 46^\circ\, 44'$, $\text{Cos.}(A + B + .. + E)$ $= \text{Cos.} - 46^\circ\, 44' = \text{Cos.}\, 46^\circ\, 44'$; folglich,

$$
\begin{aligned}
AB\ \text{Sin.}\ A &= 1033,7853 \\
AB\ \text{Cos.}\ A &= 113,5222 \\
BC\ \text{Sin.}\ (A+B) &= -\ 594,7909 \\
BC\ \text{Cos.}\ (A+B) &= 188,6788 \\
DE\ \text{Sin.}\ (A+B+C+D) &= -\ 496,8163 \\
DE\ \text{Cos.}\ (A+B+C+D) &= -\ 193,0349 \\
EF\ \text{Sin.}\ (A+B+C+D+E) &= -\ 350,2507 \\
EF\ \text{Cos.}\ (A+B+C+D+E) &= 329,6749.
\end{aligned}
$$

Hieraus findet man,

$$CD = \frac{-(1033,7853 - 594,7909 - 496,8163 - 350,2507)}{\text{Sin.}\ 38^\circ\ 22'}$$

$$= \frac{408,0726}{\text{Sin.}\ 38^\circ\ 22'} = 657,4481,$$

daher $CD\ \text{Cos.}\ (A+B+C) = 515,4753,$

$$AF = 113,5222 + 188,6788 + 515,4753 - 198,0349 + 329,6749 = 954,3163.$$

In den für CD und AF gefundenen Werthen, kann der, wegen der Unvollständigkeit der Logarithmentafeln, etwa begangene Fehler, noch nicht 0,001 betragen.

Anmerk. Obgleich in der Auflösung, der Deutlichkeit wegen, die Rechnung nur für eine einzelne Figur geführt worden ist: so erhellet doch daraus zur Genüge, wie man für jede andere Figur zu verfahren habe.

Zus. Wäre CD der AF parallel: so wäre $FA\gamma = FA\alpha - \alpha A\beta + \beta A\gamma = A + B + C = 0$; folglich $\text{Sin.}\ (A + B + C) = 0$; und daher der Ausdruck für CD, folglich auch der für AF unbestimmt. Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich auch leicht durch die bloße

Ansicht der Figur überzeugen. Denn man lasse die Punkte A, B, C, an ihrer Stelle, rücke aber den Winkel DEF zwischen den beyden Parallellinien AF, CD, vor- oder rückwärts, auf eine solche Art, daß die Schenkel DE, EF, sich selbst parallel bleiben; so leiden dadurch weder die Linien DE, EF, noch die Winkel CDE, DEF, AFE, irgend eine Veränderung in Ansehung der Größe oder Lage; woraus die Unbestimmtheit der Linien CD, AF, folgt.

§ 90.

Aufg. In einem Vielecke sind alle Seiten weniger eine und alle Winkel weniger zwey gegeben, und zwar liegen beyde unbekannte Winkel an einer von den gegebenen Seiten: man soll diese Winkel und die unbekannte Seite finden.

Aufl. Der Deutlichkeit wegen, will ich das Fünfeck ABCDE (Fig. 100) nehmen; CD sey die unbekannte Seite, und BAE, DEA, seyen die unbekannten Winkel. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = x$, $DE = d$, $EA = e$.

1) Nach § 87, 88, hat man

$$AE^2 \; (= e^2) = a^2 + b^2 + x^2 + d^2 + 2\,ab \operatorname{Cos.} B$$
$$2\,ax \operatorname{Cos.} (B + C) + 2\,ad \operatorname{Cos.} (B + C + D) + 2\,bx \operatorname{Cos.} C$$
$$+ 2\,bd \operatorname{Cos.} (C + D) + 2dx \operatorname{Cos.} D.$$

Diese Gleichung giebt, wenn sie aufgelöst wird,

$$x = -a \operatorname{Cos.} (B + C) - b \operatorname{Cos.} C - d \operatorname{Cos.} D \pm$$
$$\sqrt{\begin{bmatrix} e^2 - a^2 - b^2 - d^2 - 2\,ab \operatorname{Cos.} B - 2\,ad \operatorname{Cos.} (B + C + D) \\ - 2bd \operatorname{Cos.} (C + D) + [a \operatorname{Cos.} (B + C) + b \operatorname{Cos.} C + d \operatorname{Cos.} D]^2 \end{bmatrix}}.$$

Hat man hieraus die Linie CD bestimmt: so findet man, nach den am a. O. gegebenen Formeln, auch die Winkel BAE, DEA.

Beysp.

Beysp. Es sey $a = 540$, $b = 519$, $d = 536$, $e = 429{,}0679$, $\beta = -133^\circ 22'$, $C = 43^\circ 55'$, $D = -141^\circ 9'$; welche Werthe aus dem Beyspiele in § 87 genommen sind, wo $AE = e$ gesucht wurde, da hingegen hier e als bekannt, und das dortige c als unbekannt angenommen wird. Hier ist $e^2 - a^2 - b^2 - d^2 = -664157{,}73718959$; ferner hat man,

$$a \operatorname{Cos.}(B + C) = 540 \operatorname{Cos.} 89^\circ 27' = 5{,}1835$$
$$b \operatorname{Cos.} C = 519 \operatorname{Cos.} 43^\circ 55' = 373{,}8614$$
$$d \operatorname{Cos.} D = -536 \operatorname{Cos.} 38^\circ 51' = -417{,}4317.$$

Die übrigen Theile, aus welchen der für x gefundene Ausdruck zusammengesetzt ist, finden sich am a. O. schon berechnet. Man hat also,

$$x = -5{,}1835 - 373{,}8614 + 417{,}4317 \pm$$
$$\sqrt{\left[\begin{array}{l}-664157{,}73718959 + 384889{,}4 + 367432{,}8 \\ + 70052{,}5 + [5{,}1835 + 373{,}8614 - 417{,}4317]^2\end{array}\right]}$$

oder $x = 38{,}3868 \pm 399{,}6129 \ldots = 437{,}9997 \ldots$

Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden. In § 87 wurde $c = 438$ angenommen; der Unterschied beträgt also noch nicht 0,0003.

§ 91.

Aufg. In einem Vielecke sind alle Seiten weniger eine gegeben, wie auch alle Winkel, zwey ausgenommen, welche aber nicht, wie bey der vorigen Aufgabe vorausgesetzt wurde, an Einer Seite liegen: man soll die unbekannte Seite und die beyden unbekannten Winkel finden.

Aufl. In dem Vielecke ABCDEFGHIK (Fig. 102) sind alle Winkel und alle Seiten gegeben, die beyden Winkel KAB, HGF, und die Seite CD ausgenommen.

Man ziehe die Diagonale AG, und zerlege dadurch das Vieleck in zwey andere. In dem Vielecke AKIHG sind nun alle Seiten, AG ausgenommen, und die von den gegebenen

Seiten eingeschlossenen Winkel K, I, H, bekannt; folglich lassen sich nach § 88 die beyden unbekannten Winkel KAG, AGH, nebst der Seite AG finden. Nachdem AG gefunden worden, hat man in dem Vielecke ABCDEFG alle Seiten und alle Winkel, die Seite CD, und die Winkel BAG, AGF, ausgenommen; diese Stücke lassen sich also nach § 90 finden. Hat man auf diese Art die Winkel KAG, AGH, BAG, AGF gefunden: so hat man KAB = KAG + BAG, HGF = 360° — AGH — AGF.

§ 92.

Aufg. In einem Vielecke sind alle Seiten gegeben, wie auch alle Winkel, drey ausgenommen: man soll die unbekannten Winkel finden.

Aufl. Es sey ABC...K (Fig. 102) ein Vieleck, dessen Seiten ohne Ausnahme, und dessen Winkel alle, bis auf die drey A, D, G, gegeben sind.

Man ziehe die Diagonalen AD, AG, DG. Im Vielecke ABCD sind alsdann alle Seiten, bis auf AD, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich lassen sich (§ 88) auch die Winkel BAD, CDA, nebst der Seite AD finden. Eben so findet man im Vielecke DEFG die Seite DG und die Winkel EDG, FGD, und im Vielecke AKIHG die Seite AG und die Winkel KAG, HGA. Da also die drey Seiten des Dreyecks ADG bekannt sind: so hat man auch die Winkel desselben, aus welchen, und den vorher genannten, sich die Winkel A, D, G, bestimmen lassen. Man hat nämlich KAB = KAG + GAD + DAB, CDE = CDA + ADG + GDE, HGF = 360° — (HGA + AGD + DGF).

§ 93.

Aufg. In einem Vierecke sind drey Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 103) das Viereck, dessen Inhalt gesucht wird; AB = a, BC = b, CD = c, die gegebenen Seiten, und ABC, BCD die gegebenen Winkel. Es sey PQ eine willkührliche Abscissenlinie, Dd darauf senkrecht, und $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, die koresp. Halbmesser der Seiten AB, BC, CD, DA.

1) Nach § 26 ist $\triangle BCD = \frac{1}{2}$ bc Sin. BCD; oder, da BCD $= 180^0 -$ 𝔅CD $= 180^0 - \beta A\gamma = 180^0 - C$,

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}\,bc\ \text{Sin.}\ C.$$

2) Aus § 85 hat man

$$Dd = a\ \text{Sin.}\ A + b\ \text{Sin.}\ (A + B) + c\ \text{Sin.}\ (A + B + C),$$

wo $A = QA\alpha$.

3) Man lasse nun die Linie PQ sich so drehen, daß sie auf AB zu liegen kommt: so wird $A = 0$, und Dd gehet in Dd' über; man hat also

$$Dd' = b\ \text{Sin.}\ B + c\ \text{Sin.}\ (B + C),$$

und daher

$$\triangle BAD = \tfrac{1}{2} AB \times Dd' = \tfrac{1}{2} ab\ \text{Sin.}\ B + \tfrac{1}{2} ac\ \text{Sin.}\ (B + C).$$

4) Aus 1 und 3 ergiebt sich nun, Viereck ABCD $= \triangle BAD + \triangle BCD = \frac{1}{2}[ab\ \text{Sin.}\ B + ac\ \text{Sin.}\ (B + C) + bc\ \text{Sin.}\ C]$. Dies ist der nämliche Ausdruck, welcher, bey gehöriger Veränderung der äußern Winkel in innere, schon in § 37 auf einem anderen Wege gefunden worden ist.

Zus. Der gefundene Ausdruck bleibt auch alsdann noch richtig, wenn das Viereck einen einwärts gehenden Winkel hat. Denn gesetzt der Punkt C läge in C': so müßte man das Dreyeck BCD vom Dreyecke BAD hinwegnehmen, anstatt daß es vorhin zugesetzt wurde.

Für diesen Fall wird aber auch zugleich der Winkel C negativ, wie sich aus der dadurch bewirkten Veränderung in der

Lage der korresp. Halb. ergiebt, und man erhält für das Dreyeck BCD $= \frac{1}{2}$ bc Sin. C einen negativen Werth.

Beysp. Es sey a $= 682$, b $= 616$, c $= 407$, B $= 113° 46'$, C $= 63° 49'$. Hier ist ab Sin. B $= 384484,1$; ac Sin. (B + C) $= 11704,3$; bc Sin. C $= 224985,6$; folglich Viereck ABCD $= 310587$.

§ 94.

Aufg. In einem Fünfecke sind vier Seiten, und die drey von denselben eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. Es sey ABCDE (Fig. 104) das Fünfeck; AB $=$ a, BC $=$ b, CD $=$ c, DE $=$ d, seyen die gegebenen Seiten, und B, C, D, die gegebenen Winkel.

1) Man zerlege das Fünfeck, durch die Diagonale BE, in das Viereck BCDE, und das Dreyeck BAE; ziehe durch A die willkührliche Abscissenlinie PQ und das Perpendikel Ee.

2) Nach § 85 ist alsdann,

$$Ee = a \text{ Sin. } A + b \text{ Sin. } (A + B) + c \text{ Sin. } (A + B + C) + d \text{ Sin. } (A + B + C + D),$$

worin A $=$ QAα. Läßt man nun die Linie PQ sich nach der Seite von Q so drehen, daß sie auf AB fällt: so wird A $= 0$, und Ee gehet in Ee' über; man hat also

$$Ee' = b \text{ Sin. } B + c \text{ Sin. } (B + C) + d \text{ Sin. } (B + C + D),$$

und daher $\triangle$ BEA $= \frac{1}{2}$ AB $\times$ Ee' $=$

$$\tfrac{1}{2} [ab \text{ Sin. } B + ac \text{ Sin. } (B + C) + ad \text{ Sin. } (B + C + D)].$$

3) Nach dem vor. § ist aber,

$$\text{Viereck BCDE} = \tfrac{1}{2}[bc \text{ Sin. } C + bd \text{ Sin. } (C + D) + cd \text{ Sin. } D];$$

folglich ist Fünfeck ABCDE $=$

$$\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{l} ab \text{ Sin. } B + ac \text{ Sin. } (B + C) + ad \text{ Sin. } (B + C + D) \\ + bc \text{ Sin. } C + bd \text{ Sin. } (C + D) + cd \text{ Sin. } D \end{array}\right]$$

Beysp. Es sey a $= 332$, b $= 248$, c $= 128$, d $= 152$,

$B = 132^\circ\ 14'$, $C = -38^\circ\ 29'$, $D = 140^\circ\ 47'$. Hier ist $\text{Sin.} B = \text{Sin.}\ 47^\circ\ 46'$, $\text{Sin.}(B + C) = \text{Sin.}\ 93^\circ\ 45' = \text{Sin.}\ 86^\circ\ 15'$, $\text{Sin.}(B + C + D) = \text{Sin.}\ 234^\circ\ 32' = -\text{Sin.}\ 54^\circ\ 32'$, $\text{Sin.}\ C = -\text{Sin.}\ 38^\circ\ 29'$, $\text{Sin.}(C + D) = \text{Sin.}\ 102^\circ\ 18' = \text{Sin.}\ 77^\circ\ 42'$, $\text{Sin.}\ D = \text{Sin.}\ 39^\circ\ 13'$; man hat also,

$$ab\ \text{Sin.}\ B = 60962{,}69$$
$$ac\ \text{Sin.}(B + C) = 42405{,}01$$
$$ad\ \text{Sin.}(B + C + D) = -41100{,}56$$
$$bc\ \text{Sin.}\ C = -19753{,}88$$
$$bd\ \text{Sin.}(C + D) = 36830{,}71$$
$$cd\ \text{Sin.}\ D = 12301{,}15;$$

und daher Fünfeck ABCDE $= 45822{,}56$.

§ 95.

Aufg. In einem Sechsecke sind fünf Seiten und die vier von denselben eingeschlossenen Winkel gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 105) das Sechseck; $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EF = e$ die gegebenen Seiten, und B, C, D, E die gegebenen Winkel.

1) Man ziehe die Diagonale BF, und zerlege dadurch das Sechseck in das Fünfeck BCDEF und das Dreyeck BAF; ferner die willkührliche Abscissenlinie PQ, und Ff darauf perpendikulär: so ist (§ 85),

$$Ff = a\ \text{Sin.}\ A + b\ \text{Sin.}(A + B) + c\ \text{Sin.}(A + B + C) + d\ \text{Sin.}(A + B + C + D) + e\ \text{Sin.}(A + B + C + D + E),$$

worin $A = QAz$. Läßt man nun die Linie PQ in AB rücken: so wird $A = 0$, und Ff gehet in Ff' über; man hat also,

$$Ff' = b\ \text{Sin.}\ B + c\ \text{Sin.}(B + C) + d\ \text{Sin.}(B + C + D) + e\ \text{Sin.}(B + C + D + E),$$

und daher $\triangle BAF = \frac{1}{2} AB \times Ff' =$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} ab\,\mathrm{Sin.}\,B + ac\,\mathrm{Sin.}\,(B+C) + ad\,\mathrm{Sin.}\,(B+C+D) \\ + ae\,\mathrm{Sin.}\,(B+C+D+E) \end{array}\right]$$

2) Nach dem vorigen § ist aber, Fünfeck BCDEF =

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} bc\,\mathrm{Sin.}\,C + bd\,\mathrm{Sin.}\,(C+D) + be\,\mathrm{Sin.}\,(B+C+D) \\ + cd\,\mathrm{Sin.}\,D + ce\,\mathrm{Sin.}\,(D+E) + de\,\mathrm{Sin.}\,E \end{array}\right];$$

man hat demnach Sechseck ABCDEF =

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c} ab\,\mathrm{Sin.}\,B + ac\,\mathrm{Sin}\,(B+C) + ad\,\mathrm{Sin.}\,(B+C+D) \\ + ae\,\mathrm{Sin.}(B+C+D+E) + bc\,\mathrm{Sin.}C + bd\,\mathrm{Sin.}(C+D) \\ + be\,\mathrm{Sin.}\,(C+D+E) + cd\,\mathrm{Sin.}\,D + ce\,\mathrm{Sin.}\,(D+E) \\ + de\,\mathrm{Sin.}\,E \end{array}\right]$$

Beysp. Es sey $a = 324$, $b = 288$, $c = 1102$, $d = 528$, $e = 504$, $B = -\alpha A\beta = -60^\circ\,52'$, $C = \beta A\gamma = 129^\circ\,20'$, $D = \gamma A\delta = 139^\circ\,43'$, $E = \delta A\varepsilon = -55^\circ\,50'$. Hier ist,

ab Sin. B	=	− 81507,02
ac Sin. (B + C)	=	332127,56
ad Sin. (B+C+D)	=	− 80796,33
ae Sin. (B+C+D+E)	=	75780,64
bc Sin. C	=	245481,35
bd Sin. (C+D)	=	−152043,07
be Sin. (C+D+E)	=	− 79515,22
cd Sin. D	=	376209,31
ce Sin. (D+E)	=	552245,95
de Sin. E	=	−229182,98;
und daher Sechseck ABCDEF	=	483900,09.

§ 96.

Aufg. Alle Seiten eines Vielecks weniger eine, und alle von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind gegeben: man soll den Flächeninhalt desselben finden.

Aufl. Aus § 93, 94, 95, läßt sich leicht das Gesetz erkennen, nach welchem der Inhalt eines jeden Vieleckes aus

den angegebenen Stücken berechnet werden muß; es läßt sich auf folgende Art durch Worte ausdrücken:

Um den Inhalt eines Vieleckes aus den angegebenen Stücken zu berechnen, nehme man die halbe Summe der Produkte von jeden zweyen gegebenen Seiten, nach allen möglichen Combinationen, jedes derselben mit dem Sinus der algebraischen Summe der dazwischen liegenden äußeren Winkel multiplicirt.

Zus. Hat ein Vieleck sehr viele Seiten, wie ABCDEFGHI (Fig. 106), und sind alle Seiten und Winkel desselben bekannt: so ist es rathsamer, dasselbe durch eine Diagonale AE in zwey andere Vielecke ABCDEF, FGHIA, zu theilen, so daß das eine entweder eben so viele Seiten, oder eine Seite mehr hat als das andere, und hierauf jedes besonders zu berechnen, indem man AF als die nicht gegebene Seite beyder Vielecke ansiehet. Man erhält dadurch den Vortheil, daß man nicht so viele Glieder zu berechnen braucht, als sonst geschehen müßte; auch werden die Winkelsummen kleiner, wodurch die Rechnung ebenfalls um ein Beträchtliches erleichtert wird.

§ 97.

Aufg. Alle Seiten und Winkel eines Vielecks sind gegeben: man soll jede beliebige Diagonale desselben finden.

Aufl. Es sey ABCDEFGHI (Fig. 106) irgend ein Vieleck, und AF die zu findende Diagonale.

In dem Vielecke ABCDEF, welches durch die Diagonale AF abgeschnitten wird, sind die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, und die von denselben eingeschlossenen Winkel B, C, D, E, als Seiten und Winkel des ganzen Vielecks, gegeben; folglich läßt sich AF finden (§ 88).

Zus. Die Linie AF läßt sich aber auch aus dem ande-

ren, durch diese Diagonale abgeschnittenen Vielecke FGHIA finden. Man hat demnach zwey verschiedene Ausdrücke für diese Linie; und da dieses auch für jede andere Diagonale gilt: so ergeben sich hieraus eine Menge Gleichungen, welche die Verhältnisse der Seiten und Winkel des Vielecks gegen einander ausdrücken. So z. B. erhält man für die Diagonale AF, wenn die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IA, nach der Ordnung durch a, b, c, d, e, f, g, h, i, bezeichnet werden, folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &+ 2ab \operatorname{Cos.} B + 2ac \operatorname{Cos.} (B + C) \\
&+ 2ad \operatorname{Cos.} (B + C + D) + 2ae \operatorname{Cos} (B + C + D + E) \\
&+ 2bc \operatorname{Cos.} C + 2bd \operatorname{Cos.} (C + D) + 2be \operatorname{Cos.} (C + D + E) \\
&+ 2cd \operatorname{Cos.} D + 2ce \operatorname{Cos.} (D + E) + 2de \operatorname{Cos.} E \\
&= f^2 + g^2 + h^2 + i^2 + 2fg \operatorname{Cos.} G + 2fh \operatorname{Cos.} (G + H) \\
&+ 2fi \operatorname{Cos.} (G + H + I) + 2gh \operatorname{Cos.} H + 2gi \operatorname{Cos.} (H + I) \\
&+ 2hi \operatorname{Cos.} I.
\end{aligned}
$$

§ 98.

Aufg. Die Entfernung zweyer Oerter von einander zu bestimmen, wenn dieselbe eine etwas beträchtliche Größe hat.

Aufl. A und F (Fig. 107) mögen die beyden Oerter seyn, deren Entfernung gemessen werden soll.

Man verbinde A und F durch schicklich gewählte Standlinien AB, BC, CD, DE, EF; messe diese Linien auf mittelbare oder unmittelbare Weise, desgleichen die von denselben eingeschlossenen Winkel, ABC, BCD, CDE, DEF: so läßt sich daraus AE nach § 88 bestimmen. Bezeichnet man nämlich, wie gewöhnlich, die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, nach der Ordnung, durch a, b, c, d, e, und die äußeren Winkel durch B, C, D, E: so ist,

$$AE = \sqrt{\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2\,ab\,\mathrm{Cos.}\,B + \\ 2\,ac\,\mathrm{Cos.}\,(B + C) + 2\,ad\,\mathrm{Cos.}\,(B + C + D) + \\ 2\,ae\,\mathrm{Cos.}\,(B + C + D + E) + 2\,bc\,\mathrm{Cos.}\,C + \\ 2\,bd\,\mathrm{Cos.}\,(C + D) + 2\,be\,\mathrm{Cos.}\,(C + D + E) + \\ 2\,cd\,\mathrm{Cos.}\,D + 2\,ce\,\mathrm{Cos.}\,(D + E) + 2\,de\,\mathrm{Cos.}\,E \end{bmatrix}}$$

wo $B = -\alpha A\beta = -(180^\circ - ABC)$, $C = -\beta A\gamma = -(180^\circ - BCD)$, $D = \gamma A\delta = 180^\circ - CDE$, $E = \delta A\varepsilon = 180^\circ - DEF$.

Anmerk. Die Ausdehnung, welche hier der Aufgabe in § 88 gegeben worden, wird dadurch gerechtfertigt, daß in den Beweisen, worauf sich die Auflösung derselben gründet, nichts angenommen wurde, was nicht auf jede gebrochene, in sich geschlossene Linie anwendbar wäre.

§ 99.

Aufg. Den Inhalt eines Vieleckes aus einer seiner Seiten, den beyden anliegenden Winkeln, und den Winkeln, welche die aus den Endpunkten dieser Seite gezogenen Diagonalen mit derselben machen, zu finden.

Aufl. Es sey ABCDEFG (Fig. 108 und 109) ein Vieleck, worin die Seite AG, nebst den Winkeln BAG, CAG, DAG, EAG, FAG, BGA, CGA, DGA, EGA, FGA, gegeben ist; man soll daraus seinen Flächeninhalt bestimmen. Das Vieleck Fig. 108 hat lauter auswärts gehende Winkel, das Fig. 109 hat auch einwärts gehende.

1) Aus den gegebenen Winkeln lassen sich auch die Winkel BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, desgleichen ABG, ACG, ADG, AEG, AFG, durch bloßes Abziehen finden. Sind diese gefunden: so erhält man aus den Dreyecken BAG, CAG, DAG, EAG, FAG, folgende Bestimmungen:

$$AB = \frac{AG\,\mathrm{Sin.}\,BGA}{\mathrm{Sin.}\,ABG},\quad AC = \frac{AG\,\mathrm{Sin.}\,CGA}{\mathrm{Sin.}\,ACG},$$

$$AD = \frac{AG \text{ Sin. } DGA}{\text{Sin. } ADG},\ AE = \frac{AG \text{ Sin. } EGA}{\text{Sin. } AEG},$$

$$AF = \frac{AG \text{ Sin. } FGA}{\text{Sin. } AFG}.$$

2) Hieraus, und aus § 26 erhält man,

$$\triangle BAC = \tfrac{1}{2} AB \,.\, AC \text{ Sin. } BAC = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2 \text{ Sin. } BGA \text{ Sin. } CGA \text{ Sin. } BAC}{\text{Sin. } ABG \text{ Sin. } ACG}$$

$$\triangle CAD = \tfrac{1}{2} AC \,.\, AD \text{ Sin. } CAD = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2 \text{ Sin. } CGA \text{ Sin. } DGA \text{ Sin. } CAD}{\text{Sin. } ACG \text{ Sin. } ADG}$$

$$\triangle DAE = \tfrac{1}{2} AD \,.\, AE \text{ Sin. } DAE = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2 \text{ Sin. } DGA \text{ Sin. } EGA \text{ Sin. } DAE}{\text{Sin. } ADG \text{ Sin. } AEG}$$

$$\triangle EAF = \tfrac{1}{2} AE \,.\, AF \text{ Sin. } EAF = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2 \text{ Sin. } EGA \text{ Sin. } FGA \text{ Sin. } EAF}{\text{Sin. } AEG \text{ Sin. } AFG}$$

$$\triangle FAG = \tfrac{1}{2} AF \,.\, AG \text{ Sin. } FAG = \frac{\tfrac{1}{2} AG^2 \text{ Sin. } FGA \text{ Sin. } FAG}{\text{Sin. } AFG}.$$

3) Da nun Siebeneck ABCDEFG $= \triangle BAC \pm \triangle CAD$ $\triangle DAE + \triangle EAF + \triangle FAG$, (das obere von den Zeichen $\pm$ für Fig. 109): so ist dasselbe $=$

$$\frac{1}{2} AG^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Sin. BGA Sin. CGA Sin. BAC}}{\text{Sin. ABG Sin. ACG}} \\ \pm \frac{\text{Sin. CGA Sin. DGA Sin. CAD}}{\text{Sin. ACG Sin. ADG}} \\ + \frac{\text{Sin. DGA Sin. EGA Sin. DAE}}{\text{Sin. ADG Sin. AEG}} \\ + \frac{\text{Sin. EGA Sin. FGA Sin. EAF}}{\text{Sin. AEG Sin. AFG}} \\ + \frac{\text{Sin. FGA Sin. FAG}}{\text{Sin. AFG}} \end{array} \right\}.$$

4) Nimmt man G, anstatt A, für die gemeinschaftliche Spitze der Dreyecke an: so erhält man, weil Vieleck ABCDEFG $= \pm \triangle FGE + \triangle EGD \pm \triangle DGC + \triangle CGB + \triangle BGA$, noch folgenden Ausdruck für den Flächeninhalt desselben:

$$\frac{1}{2} AG^2 \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{\text{Sin. FAG Sin. EAG Sin. FGE}}{\text{Sin. AFG Sin AEG}} \\ + \frac{\text{Sin. EAG Sin. DAG Sin. EGD}}{\text{Sin. AEG Sin. ADG}} \\ \pm \frac{\text{Sin. DAG Sin. CAG Sin. DGC}}{\text{Sin. ADG Sin. ACG}} \\ + \frac{\text{Sin. CAG Sin. BAG Sin. CGB}}{\text{Sin. ACG Sin. ABG}} \\ + \frac{\text{Sin. BGA Sin. BAG}}{\text{Sin. ABG}} \end{array} \right\}.$$

Zus. Ob gleich die Rechnung hier nur für ein Siebeneck geführt worden ist: so läßt sich doch daraus sehr gut abnehmen, wie man für jedes andere Vieleck zu verfahren habe. Das Gesetz, welchem die Glieder der Ausdrücke in 3 und 4 folgen, läßt sich leichter durch den Anblick erkennen, als durch

Worte ausdrücken. Uebrigens können diese Ausdrücke sich wechselseitig zur Prüfung der Rechnung dienen.

Beysp. Es sey (Fig. 108) BAG = 120°, CAG = 101° 37′, DAG = 81° 20′, EAG = 48° 19′, FAG = 23° 48′; FGA = 88° 14′, EGA = 70°, DGA = 51° 27′, CGA = 34° 7′, BGA = 22° 10′. Hier ist ABG = 37° 50′, ACG = 44° 16′, ADG = 47° 13′, AEG = 61° 41′, AFG = 67° 58′; BAC = 18° 23′, CAD = 20° 17′, DAE = 33° 1′, EAF = 24° 31′; FGE = 18° 14′, EGD = 18° 33′, DGC = 17° 20′, CGB = 11° 57′. Man hat also,

$$\frac{\text{Sin. BGA Sin. CGA Sin. BAC}}{\text{Sin. ABG Sin. ACG}} = 0{,}1558865$$

$$\frac{\text{Sin. CGA Sin. DGA Sin. CAD}}{\text{Sin. ACG Sin. ADG}} = 0{,}2968328$$

$$\frac{\text{Sin. DGA Sin. EGA Sin. DAE}}{\text{Sin. ADG Sin. AEG}} = 0{,}6197669$$

$$\frac{\text{Sin. EGA Sin. FGA Sin. EAF}}{\text{Sin. AEG Sin. AFG}} = 0{,}4776058$$

$$\frac{\text{Sin. FGA Sin. FAG}}{\text{Sin. AFG}} = 0{,}4351331;$$

und daher nach 3, Siebeneck ABCDEFG = 0,9926125 . AG^2.

Man hat ferner,

$$\frac{\text{Sin. FAG Sin. EAG Sin. FGE}}{\text{Sin. AFG Sin. AEG}} = 0{,}1155552$$

$$\frac{\text{Sin. EAG Sin. DAG Sin. EGD}}{\text{Sin. AEG Sin. ADG}} = 0{,}3635294$$

$$\frac{\text{Sin. DAG Sin. CAG Sin. DGC}}{\text{Sin. ADG Sin. ACG}} = 0{,}5631592$$

$$\frac{\text{Sin. CAG Sin. BAG Sin. CGB}}{\text{Sin. ACG Sin. ABG}} = 0{,}4102605$$

$$\frac{\text{Sin. BGA Sin. BAG}}{\text{Sin. ABG}} = 0{,}5327207;$$

und daher nach 4, Siebeneck ABCDEFG = 0,9926125 . AG^2, wie vorher.

Um nun den Flächeninhalt des Siebenecks völlig zu bestimmen, darf man nur die Länge von AG wissen. Es sey z. B. AG = 450: so ist Siebeneck ABCDEFG = 201004,03 ungefähr.

Zus. Diese Art, den Flächeninhalt einer Figur zu berechnen, kann sehr vortheilhaft bey der Theilung derselben angewandt werden. Wollte man z. B. von dem eben berechneten Siebenecke durch eine, aus dem Punkte A gezogene Linie, den $\frac{5}{8}$ Theil abschneiden: so hätte man

$$\tfrac{5}{8}\ \text{ABCDEFG} = 0{,}6203828 \,.\, AG^2.$$

Nun ist nach den obigen Rechnungen △ BAC = 0,1558865 . AG^2, △ CAD = 0,2968328 . AG^2, △ DAE = 0,6197669 . AG^2; woraus erhellet, daß die Theilungslinie Aa zwischen AD und AE fällt, und zwar muß △ DAa = 0,1676635 . AG^2 seyn. Man hat also △ DAE : △ DAa = 6197669 : 1676635 = DE : Da, oder ungefähr DE : Da = 920 : 257, wie vermittelst der kontinuirlichen Brüche gefunden wird. Nach diesem Verhältnisse muß also die Linie DE in a getheilt werden, und alsdann hat man, wenn Aa gezogen wird, ABCDa = $\frac{5}{8}$ ABCDEFG.

§ 100.

Aufg. Aus den nämlichen gegebenen Stücken, wie in der vorigen Aufgabe, eine jede beliebige Seite des Vielecks zu finden.

Aufl. Es sey ABCDEFG (Fig. 108) das Vieleck, worin die nämlichen Stücke, wie in der vorigen Aufgabe gegeben sind: man soll die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FG, finden.

In den Dreyecken ABG, AFG, sind alle Winkel und die Linie AG gegeben; folglich lassen sich auch die Seiten AB, FG, finden. Die übrigen Seiten werden nach der siebenten Auflösung in § 48 gefunden. Wollte man z. B. die Linie DE bestimmen: so gäbe die Vergleichung mit der angeführten Stelle, $a = AG$, $\alpha = DAG$, $\beta = EAG$, $\gamma = EGA$, $\delta = DGA$, und man hätte demnach,

$$DE = AG \sqrt{\left[\left(\frac{\text{Sin. } DGA}{\text{Sin. } A}\right)^2 + \left(\frac{\text{Sin. } EGA}{\text{Sin. } B}\right)^2 - \frac{2 \text{ Sin. } DGA \text{ Sin. } EGA \text{ Cos. } (DAG - EAG)}{\text{Sin. } A \text{ Sin. } B}\right]}$$

worin $A = 180^\circ - DAG - EAG$, $B = 180^\circ - EGA - EAG$.

Anmerk. Von der Polygonometrie handeln folgende Schriftsteller: Lexell (De resolutione polygonorum rectilineorum. Commentarii novi. Petrop. T. 19. 20); L'Huilier (Polygonometrie ou de la mesure des figures rectilignes, etc. Geneve et Paris 1789); Neumann (Neue Beyträge zur praktischen Geometrie. München 1800); Däzel in der oben angeführten Schrift; Mascheroni (Problemi di Geometria. Milano, Anno X (1802) p. 105 seq.), wie auch in einer besondern Schrift (Metodo di misurari i poligoni piani), welche 1787 in Pavia erschienen ist, und welche schon alle die Probleme enthalten soll, die sich in L'Huiliers 1789 erschienener Polygonometrie befinden; ich habe sie aber nicht zu sehen bekommen können. Von der Tetragonometrie insbesondere handelt Lambert in seinen Beyträgen II. Theil, S. 175 seq.; J. T. Mayer (Tetragonometriae Specimen I. Gött. 1773); Biörnsen (Introductio in Tetragonometriam ad mentem v. c. Lambert analytice conscripta. Havniae

1780). Manches hierher gehörige findet man auch in Carnot's Géometrie de position. Paris 1803, unter andern S. 304 u. f., welche Stelle schon abgedruckt war, als er erst L'Huiliers oben genannte Schrift kennen lernte.

IX. Einige wichtige Aufgaben aus der praktischen Geometrie, mit vorzüglicher Hinsicht auf die Behandlung der negativen Winkel.

§ 101.

Vorbereitung.

1) A, B, C, D, E, (Fig. 110), sey ein System von Punkten; O ein Punkt, für welchen, bey der in der Figur vorausgesetzten gegenseitigen Lage jener Punkte, und irgend einer darauf gegründeten Rechnung, AOB $= \alpha$, BOC $= \beta$, COD $= \gamma$, DOE $= \delta$, angenommen worden. Gesetzt nun, man wollte, nach vollendeter Rechnung, irgend einen herausgebrachten algebraischen Ausdruck auf einen besondern Fall anwenden; der Punkt O hätte aber nicht die bey der Rechnung vorausgesetzte Stelle in Beziehung auf das System, sondern läge etwa in O': so ist klar, daß, was die absolute Größe der Winkel anbetrifft, $\alpha =$ AO'B, $\beta =$ BO'C, $\gamma =$ CO'D, $\delta =$ DO'E, gesetzt werden muß. Um nun auch zu bestimmen, welche Winkel der veränderten Lage gemäß, als positiv, und welche als negativ angesehen werden müssen, kann man sich desselben Mittels wie in § 84 bedienen, mit dem Unter-

schiede, daß hier die korresp. Halbmesser mit den Richtungen der Schenkel selbst zusammen fallen, anstatt daß sie an dem a. O. nach den Richtungen ihrer Verlängerungen gezogen wurden. Diese Abänderung geschiehet bloß deshalb, weil man es hier mit den Winkeln selbst, dort aber mit ihren Nebenwinkeln zu thun hat.

2) Es sey daher um O ein Kreis beschrieben, welcher die Linien OA, OB, OC, OD, OE, oder ihre Verlängerungen, in den Punkten a, b, c, d, e, schneidet: so sind Oa, Ob, Oc, Od, Oe, die korresp. Halbm. jener Linien. Der Punkt O rücke nun in O′, und es seyen die Linien Oa′, Ob′, Oc′, Od′, Oe′, nach der Ordnung, den Linien O′A, O′B, O′C, O′D, O′E, parallel gezogen: so sind die ersteren die korresp. Halbm. der letzteren in Beziehung auf O′, und man hat a′Ob′ = AO′B, b′Oc′ = BO′C, c′Od′ = CO′D, d′Oe′ = DO′E. Man denke sich nun wieder, wie in § 84, einen beweglichen Halbmesser, der sich um den Punkt O drehet; ein solcher muß, um aus Oa′ in Ob′ zu rücken, eine Bewegung machen, welche der entgegengesetzt ist, durch welche er aus Oa in Ob rückt. Die beyden Winkel aOb, a′Ob′, und demnach auch AOB, AO′B, sind also der Lage nach einander entgegengesetzt, und man hat daher $a = -AO'B$. Das Nämliche gilt von den Winkeln bOc, b′Oc′, und daher auch von BOC, BO′C; folglich ist $\beta = -BO'C$. Hingegen hat der bewegliche Halbmesser dieselbe Richtung der Bewegung, er mag aus Oc in Od, oder aus Oc′ in Od′ rücken; also ist γ positiv, und man hat $\gamma = CO'D$. Aus einem ähnlichen Grunde ist δ positiv, und man hat daher $\delta = DO'E$.

3) Bisher wurde angenommen, daß der Punkt O allein wegrücke, die Punkte A, B, C, D, E, hingegen an ihren Stellen bleiben. Aber auch für den Fall, daß die Punkte des Sy-

stems

stems selbst ihre Lage gegen einander ändern, leidet die gegebene Regel keine Ausnahme. Gesetzt, die Punkte A, B, C, D, E, O, hätten die Lage von A′, B′, C′, D′, E′, O′, (Fig. 111), so daß A in A′, B in B′, u. s. w. gerückt wäre, und man sollte dem gemäß die Werthe von α, β, γ, δ, bestimmen: so ziehe man die den Linien O′A′, O′B′, O′C′, O′E′, korresp. Halbm. Oa′, Ob′, Oc′, Od′, Oe′, und vergleiche Fig. 110 mit Fig. 111. Alsdann ergiebt sich $\alpha = -$ a′Ob′ $=$ $-$A′O′B′, $\beta =$ b′Oc′ $=$ B′O′C′, $\gamma = -$c′Od′ $= -$C′O′D′, $\delta = -$ d′Oe′ $= -$ D′O′E′.

Man braucht, um über die positive oder negative Lage der Winkel zu entscheiden, die korresp. Halbmesser nicht wirklich zu ziehen. Bey einiger Uebung reicht das bloße Umdrehen eines Zirkels schon hin, wie jeder leicht ohne weitläufige Erklärung einsehen wird.

§ 102.

Aufg. Drey unzugängliche Punkte sind ihrer Lage und Entfernung nach gegeben: man soll die Lage und Entfernungen zweyer anderen Punkte in Hinsicht auf jene bestimmen, ohne irgend eine Linie zu messen.

Erste Auflösung.

A, B, C, (Fig. 112) sollen die drey Punkte seyn; die Entfernungen AB, BC, und der Winkel ABC sind gegeben; man soll die Lage zweyer anderen Punkte M, N bloß aus gemessenen Winkeln bestimmen.

Ich will annehmen, man könne alle drey Punkte, A, B, C, sowohl aus M als N sehen, und daselbst (wenn man sich MC, NA gezogen denkt,) die Winkel AMB, BMC, ANB, BNC, messen. Für diesen Fall lassen sich die Punkte M, N, nach § 54 einzeln bestimmen, und die Entfernuungen MA,

MB, MC, NA, NB, NC, berechnen. Aber auch die Entfernung MN läßt sich leicht berechnen; denn man hat alsdenn im Dreyecke MBN den Winkel MBN = ABC — ABM — CBN, und die Seiten MB, NB.

Zweyte Auflösung.

1) Ich will nun annehmen, man könne aus M zwar die Punkte A, B, N, aber nicht den Punkt C, und aus N zwar die Punkte B, C, M, aber nicht den Punkt A sehen. Alsdann lassen sich die Winkel AMB, BMN, BNC, CNM, messen. Es sey AB = a, BC = b, ABC = B, AMB = α, BMN = β, BNC = γ, CNM = δ. Wäre nun noch der Winkel MAB bekannt: so hätte man auch alles Uebrige. Man setze daher MAB = φ, und ziehe Bb, bc, den Linien CN, BC, parallel.

2) Aus diesen Annahmen erhält man BbM = CNM = δ, ABM = $180^\circ - (\alpha + \varphi)$, MBb = $180^\circ - (\beta + \delta)$, und hieraus bBC = ABC — ABM — MBb = $B + \alpha + \beta + \delta + \varphi - 360^\circ$ = Ccb; folglich Nbc = Ccb — CNM = $B + \alpha + \beta + \varphi - 360^\circ$, BCN = 180° — bBC = $540^\circ - (B + \alpha + \beta + \delta + \varphi)$, CBN = 180° — BCN — BNC = $B + \alpha + \beta - \gamma + \delta + \varphi - 360^\circ$. Setzt man daher der Kürze wegen, $B + \alpha + \beta - 360^\circ = \varkappa$, $B + \alpha + \beta - \gamma + \delta - 360^\circ = \lambda$: so ist Nbc = $\varkappa + \varphi$, CBN = $\lambda + \varphi$.

3) Das Dreyeck ABM giebt,

$$BM = \frac{AB \operatorname{Sin.} MAB}{\operatorname{Sin.} AMB} = \frac{a \operatorname{Sin.} \varphi}{\operatorname{Sin.} \alpha},$$

und das Dreyeck MBb,

$$Bb = \frac{BM \operatorname{Sin.} BMN}{\operatorname{Sin.} BbM} = \frac{a \operatorname{Sin.} \varphi \operatorname{Sin.} \beta}{\operatorname{Sin.} \alpha \operatorname{Sin.} \delta};$$

ferner das Dreyeck Nbc,

$$Nc = \frac{bc \text{ Sin. } Nbc}{\text{Sin. } CNM} = \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \delta},$$

und das Dreyeck BNC,

$$CN = \frac{BC \text{ Sin. } CBN}{\text{Sin. } BNC} = \frac{b \text{ Sin. } (\lambda + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma}.$$

4) Nun ist $CN = Cc + Nc = Bb + Nc$: man hat also die Gleichung,

$$\frac{b \text{ Sin. } (\lambda + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma} = \frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta} + \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \delta},$$

oder, wenn man Sin. $(\lambda + \varphi)$, Sin. $(\varkappa + \varphi)$, entwickelt (§. 9), durch Sin. φ dividirt, und Cot. φ für $\frac{\text{Cos. } \varphi}{\text{Sin. } \varphi}$ setzt,

$$\frac{b (\text{Sin. } \lambda \text{ Cot. } \varphi + \text{Cos. } \lambda)}{\text{Sin. } \gamma} = \frac{a \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta}$$
$$+ \frac{b (\text{Sin. } \varkappa \text{ Cot. } \varphi + \text{Cos. } \varkappa)}{\text{Sin. } \delta},$$

woraus man erhält,

$$\text{Cot. } \varphi =$$
$$\frac{a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma + b \text{ Sin. } \alpha (\text{Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - \text{Sin. } \delta \text{ Cos. } \lambda)}{b \text{ Sin. } \alpha (\text{Sin. } \delta \text{ Sin. } \lambda - \text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa)}.$$

Erst. Beysp. Es sey $a = 351$, $b = 402$, $B = 167° 4'$, $\alpha = 33° 3'$, $\beta = 90° 51'$, $\gamma = 27° 19'$, $\delta = 76° 20'$; also $\varkappa = -69° 2'$, $\lambda = -20° 1'$, und daher Sin. $\varkappa$ = $-$ Sin. $69° 2'$, Cos. $\varkappa$ = Cos. $69° 2'$, Sin. $\lambda = -$ Sin. $20° 1'$, Cos. λ = Cos. $20° 1'$. Man hat also,

$$a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \gamma = 161{,}0590$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa = 36{,}0009$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Cos. } \lambda = 200{,}1631$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \lambda = -72{,}9193$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa = -93{,}9490$$

und daher,

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{161{,}0590 + 36{,}0009 - 200{,}1631}{-72{,}9193 + 93{,}9490}$$

$$= -0{,}1475627;$$

folglich $\varphi = 98^\circ\ 23'\ 39''$.

Zweyt. Beysp. Ich will annehmen, die Punkte A, B, C, M, N, hätten die Lage von A′, B′, C′, M′, N′, (Fig. 113). Hier muß man nun vor allem wissen, welche von den gegebenen Winkeln α, β, γ, δ, B, man, dieser veränderten Lage gemäß, als positiv, und welche man als negativ anzusehen hat. Denkt man sich zuerst um M, M′, zwey Kreise beschrieben, so wird man sogleich wahrnehmen, daß die korresp. Halbm. von MA, MB, eine Lage haben, die der entgegengesetzt ist, welche die k. H. von M′A′, M′B′, haben, und daß dies auch der Fall mit den k. Halbmessern von MB, MN, verglichen mit denen von M′B′, M′N′, sey: also wird sowohl α als β negativ. Eben so läßt sich zeigen, wenn man um B und B′ zwey Kreise beschreibt, daß auch B negativ werde. Beschreibt man hingegen um N, N′, zwey Kreise: so fällt sogleich in die Augen, daß die Winkel BNC, B′N′C′, wie auch CNM, C′N′M′, einerley Lage haben, und daß daher γ und δ positiv bleiben.

Es sey nun $B = -A'B'C' = -56^\circ\ 1'$, $\alpha = -A'M'B' = -103^\circ\ 6'$, $\beta = -B'M'N' = -41^\circ\ 8'$, $\gamma = B'N'C' = 144^\circ\ 27'$, $\delta = C'N'M' = 50^\circ\ 43'$, $a = A'B' = 980$, $b = B'C' = 1000$. Hier ist $\varkappa = B + \alpha + \beta - 360^\circ = -560^\circ\ 15'$, $\lambda = B + \alpha + \beta - \gamma + \delta - 360^\circ = -653^\circ\ 59'$; also $\text{Sin. } \varkappa = \text{Sin. } -560^\circ\ 15' = -\text{Sin. } 560^\circ\ 15' = -\text{Sin. } 200^\circ\ 15' = \text{Sin. } 20^\circ\ 15'$, $\text{Cos. } \varkappa = \text{Cos. } -560^\circ\ 15' = \text{Cos. } 560^\circ\ 15' = \text{Cos. } 200^\circ\ 15' = -\text{Cos. } 20^\circ\ 15'$, $\text{Sin. } \lambda = \text{Sin. } -653^\circ\ 59' = -\text{Sin. } 653^\circ\ 59' = -\text{Sin. } 293^\circ\ 59' = \text{Sin. } 66^\circ\ 1'$, $\text{Cos. } \lambda = \text{Cos. } -653^\circ\ 59' = \text{Cos. } 653^\circ\ 59' = \text{Cos. } 293^\circ\ 59' = \text{Cos. } 66^\circ\ 1'$; mithin

$$a \,\text{Sin.}\, \beta \,\text{Sin.}\, \gamma = -374{,}8122$$
$$b \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Cos.}\, \varkappa = 531{,}2812$$
$$b \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \delta \,\text{Cos.}\, \lambda = -306{,}4307$$
$$b \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \delta \,\text{Sin.}\, \lambda = -688{,}7940$$
$$b \,\text{Sin.}\, \alpha \,\text{Sin.}\, \gamma \,\text{Sin.}\, \varkappa = -196{,}0000.$$

Man hat also,

$$\text{Cot.}\, \varphi = \frac{-374{,}8122 + 531{,}2812 + 306{,}4307}{-688{,}7940 + 196{,}0000}$$
$$= \frac{+462{,}8997}{-492{,}7940} = -0{,}9393371,$$

und daher entweder $\varphi = 133^\circ\, 12'\, 30''$, oder $\varphi = -46^\circ\, 47'\, 30''$. Der erste von diesen beyden Werthen für φ kann hier nicht gebraucht werden, weil B'A'M' + A'M'B' nicht größer als 180° seyn darf. Man hat also bloß

$$\varphi = -46^\circ\, 47'\, 30''.$$

Da hier φ negativ gefunden worden ist: so muß, wie auch die Figur zeigt, A'M' jenseits der Linie A'B' liegen.

Nachdem nun B'A'M' gefunden worden, lassen sich auch sehr leicht alle übrige Stücke der Figur berechnen.

Zus. Die beyden gesuchten Punkte lassen sich auch durch folgende sehr einfache Zeichnung finden.

Es seyen A, B, C, (Fig. 114), die drey gegebenen Punkte. Man beschreibe über AB als Sehne einen Kreisbogen BDMA, welcher den Winkel α, und über BC einen andern Kreisbogen CNEB, welcher den Winkel γ in sich faßt; nehme hierauf den Bogen BD $= 2\beta$, und den Bogen CBE $= 2\delta$, und ziehe durch die auf diese Art bestimmten Punkte D, E, die Linie DE, welche verlängert die beyden Kreise in M, N, trifft: so sind M, N, die beyden gesuchten Punkte. Denn da BD $= 2\beta$, und CBE $= 2\delta$: so ist BMD $= \beta$, CNE $= \delta$; auch ist unmittelbar aus der Construktion selbst, AMB $= \alpha$, BNC $= \gamma$.

§ 103.

Aufg. Vier unzugängliche Punkte sind ihrer Lage und Entfernung nach gegeben; man soll die Lage dreyer anderen Punkte in Hinsicht auf jene bestimmen, ohne eine Linie zu messen.

Aufl. A, B, C, D, (Fig. 115), seyen die vier gegebenen Punkte, und M, N, P, die drey, deren Lage bestimmt werden soll. Kann man nun aus jedem der gesuchten Punkte drey von den gegebenen sehen: so lassen sich jene nach § 54 einzeln bestimmen. Da dieser Fall keine Schwierigkeit hat: so will ich annehmen, man könne aus M bloß die drey Punkte A, B, N, und aus P bloß die drey Punkte D, C, N, sehen; aus N aber nur einen von den gegebenen Punkten, etwa C, und die beyden gesuchten M, P. Bey dieser Voraussetzung kann man also die Winkel AMB, BMN, CNM, CNP, CPN, CPD, messen. Da ferner die vier Punkte A, B, C, D, ihrer Lage und Entfernung nach gegeben sind: so hat man auch die Linien AB, BC, CD, und die Winkel ABC, BCD. Es sey daher $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $ABC = B$, $BCD = C$, $AMB = \alpha$, $BMN = \beta$, $CNM = \gamma$, $CNP = \delta$, $CPN = \varepsilon$, $CPD = \zeta$. Könnte man nur noch den Winkel MAB finden: so wäre auch alles Uebrige in der Figur bekannt. Man setze daher $MAB = \varphi$, und ziehe Bb der CN und bc der BC parallel.

1) Alsdann ist $ABM = 180° - (\alpha + \varphi)$, $BbM = CNM = \gamma$, und daher $MBb = 180° - BMb - BbM = 180° - (\beta + \gamma)$; folglich $Ccb = bBC = ABC - ABM - MBb = B + \alpha + \varphi + \beta + \gamma - 360°$, $Nbc = Ccb - CNM = B + \alpha + \varphi + \beta - 360°$. Da ferner im Siebeneck ABCDPNM alle Winkel zusammen $= 10 R = 900°$ sind: so ist $CDP = 900° - (AMN + MNP + NPD + BCD + ABC + MAB) =$

$900^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + C + B + \varphi)$. Setzt man nun zur Abkürzung $B + \alpha + \beta - 360^\circ = \varkappa$, $900^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + B + C) = \lambda$: so ist $Nbc = \varkappa + \varphi$, $CDP = \lambda - \varphi$.

2) Im Dreyecke ABM ist,

$$BM = \frac{AB \text{ Sin. } MAB}{\text{Sin. } AMB} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } \alpha};$$

im Dreyecke MBb,

$$Bb = \frac{BM \text{ Sin. } BMb}{\text{Sin. } BbM} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma};$$

im Dreyecke Nbc,

$$Nc = \frac{bc \text{ Sin. } Nbc}{\text{Sin. } bNc} = \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma};$$

im Dreyecke CDP,

$$CP = \frac{CD \text{ Sin. } CDP}{\text{Sin. } CPD} = \frac{c \text{ Sin. } (\lambda - \varphi)}{\text{Sin. } \zeta},$$

und im Dreyecke CPN,

$$CN = \frac{CP \text{ Sin. } CPN}{\text{Sin. } CNP} = \frac{c \text{ Sin. } (\lambda - \varphi) \text{ Sin. } \varepsilon}{\text{Sin. } \zeta \text{ Sin. } \delta}.$$

3) Da nun $CN = Cc + Nc = Bb + Nc$: so hat man die Gleichung

$$\frac{c \text{ Sin. } (\lambda - \varphi) \text{ Sin. } \varepsilon}{\text{Sin. } \zeta \text{ Sin. } \delta} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma} + \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma}.$$

Man entwickele Sin. $(\lambda - \varphi)$, Sin. $(\varkappa + \varphi)$, (§. 9), dividire die Gleichung durch Sin. φ und setze Cot. φ für $\frac{\text{Cos. } \varphi}{\text{Sin. } \varphi}$; dies giebt

$$\frac{c \text{ Sin. } \varepsilon \text{ (Sin. } \lambda \text{ Cot. } \varphi - \text{Cos. } \lambda)}{\text{Sin. } \zeta \text{ Sin. } \delta} = \frac{a \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma}$$
$$+ \frac{b \text{ (Sin. } \varkappa \text{ Cot. } \varphi + \text{Cos. } \varkappa)}{\text{Sin. } \gamma},$$

und hieraus erhält man,

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{\left[\begin{array}{c}\text{a Sin. } \beta \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \zeta + \text{b Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \zeta \text{ Cos. } \varkappa \\ + \text{c Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varepsilon \text{ Cos. } \lambda\end{array}\right]}{- \text{b Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \zeta \text{ Sin. } \varkappa + \text{c Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varepsilon \text{ Sin. } \lambda},$$

woraus sich der Winkel φ, und somit alles Uebrige bestimmen läßt.

Beysp. A', B', C', D', (Fig. 116), sind vier Punkte, deren Lage bekannt ist; M', N', P', drey andere, deren Lage gesucht wird. Aus M' ist bloß A', B', N', aus N' bloß C', M', P', und aus P' bloß C', D', N', sichtbar. Die aus diesen Punkten gemessenen Winkel sind folgendermaßen gefunden worden: A'M'B' = 80° 8', B'M'N' = 24° 55', C'N'M' = 124° 16', C'N'P' = 98° 44', C'P'N' = 29° 13', C'P'D' = 51° 19'. Für die Punkte A', B', C', D', hat man A'B' = 815, B'C' = 670, C'D' = 660, A'B'C' = 49° 54', B'C'D' = 73° 57'.

Die Vergleichung der Fig. 116 mit Fig. 115 zeigt sogleich die Verwandschaft derselben, und zwar hat man, wenn das, was in § 101. gelehrt worden, auf jede zwey korrespondirende Winkelpunkte angewandt wird, $\alpha = -80° 8'$, $\beta = 24° 55'$, $\gamma = -124° 16'$, $\delta = -98° 44'$, $\varepsilon = -29° 13'$, $\zeta = -51° 19'$, $B = 49° 54'$, $C = -73° 57'$; auch ist $a = 815$, $b = 670$, $c = 660$. Aus diesen Angaben erhält man nun, $\varkappa = -365° 19'$, $\lambda = 1282° 48'$; demnach ist Sin. $\varkappa$ = Sin. $-365° 19'$ = $-$Sin. $365° 19'$ = $-$Sin. $5° 19'$, Cos. $\varkappa$ = Cos. $-365° 19'$ = Cos. $365° 19'$ = Cos. $5° 19'$, Sin. λ = Sin. $1282° 48'$ = Sin. $202° 48'$ = $-$Sin. $22° 48'$, Cos. $\varkappa$ = Cos. $1282° 48'$ = Cos. $202° 48'$ = $-$Cos. $22° 48'$. Ferner ist Sin. α = $-$Sin. $80° 8'$, Sin. β = Sin. $24° 55'$, Sin. γ = $-$Sin. $124° 16'$ = $-$Sin. $55° 44'$, Sin. δ = $-$Sin. $98° 44'$ = $-$Sin. $81° 16'$,

$\text{Sin.}\,\varepsilon = -\text{Sin.}\,29^\circ\,13'$, $\text{Sin.}\,\zeta = -\text{Sin.}\,51^\circ\,19'$. Man hat also,

$$\begin{aligned} a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\zeta &= 264{,}9228 \\ b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Cos.}\,\varkappa &= -507{,}1091 \\ c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Cos.}\,\lambda &= 241{,}8042 \\ b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\varkappa &= 47{,}1919 \\ c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon\,\text{Sin.}\,\lambda &= 101{,}6451; \end{aligned}$$

und daher,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{264{,}9228 - 507{,}1091 + 241{,}8042}{-47{,}1919 + 101{,}6451} = \frac{-0{,}3821}{54{,}4532} = -0{,}0070170.$$

Man hat also entweder, $\varphi = 90^\circ\,24'\,7''$, oder $\varphi = -89^\circ\,35'\,53''$. In der Figur, für welche die Rechnung geführt worden ist, hat φ den zweyten Werth, und demnach ist $B'A'M = 89^\circ\,35'\,53''$.

Um die Rechnung zu prüfen, darf man nur den hier für φ gefundenen Werth in die Gleichung

$$\frac{c\,\text{Sin.}\,(\lambda-\varphi)\,\text{Sin.}\,\varepsilon}{\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\delta} = \frac{a\,\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma} + \frac{b\,\text{Sin.}\,(\varkappa+\varphi)}{\text{Sin.}\,\gamma}$$

setzen, welche in 3 der Aufl. gefunden worden. Da diese Probe selbst etwas Belehrendes hat: so will ich sie hersetzen.

Da $\lambda = 1282^\circ\,48'$, $\varkappa = -365^\circ\,19'$, $\varphi = -89^\circ\,35'\,53''$: so ist $\lambda - \varphi = 1372^\circ\,23'\,53''$, $\varkappa + \varphi = -454^\circ\,54'\,53''$; daher $\text{Sin.}\,(\lambda-\varphi) = \text{Sin.}\,1372^\circ\,23'\,53'' = \text{Sin.}\,292^\circ\,37'\,53'' = -\text{Sin.}\,67^\circ\,36'\,7''$, $\text{Sin.}\,(\varkappa+\varphi) = \text{Sin.} -454^\circ\,54'\,53'' = -\text{Sin.}\,94^\circ\,54'\,53'' = -\text{Sin.}\,85^\circ\,5'\,7''$. Man hat also,

$$\frac{c\,\text{Sin.}\,(\lambda-\varphi)\,\text{Sin.}\,\varepsilon}{\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\delta} = 386{,}0368$$

$$\frac{a\,\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma} = -421{,}7018$$

$$\frac{b \text{ Sin.} (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin.} \gamma} = 807{,}7391.$$

Es müßte also 386,0368 = −421,7018 + 807,7391 seyn; und dies ist auch richtig, bis auf einen Fehler von 0,0005, welcher von der Unvollkommenheit der Tafeln herrührt.

Nachdem der Winkel φ gefunden worden, ist es leicht, alle in der Figur vorhandenen Linien zu berechnen. Man verfährt hierbey am besten, wenn man zuerst die allgemeinen Ausdrücke der gesuchten Linien aus Fig. 115 herleitet, und solche nach Fig. 116 berechnet. Wollte man z. B. die Linie M′N′ (Fig. 116) berechnen: so suche man vor allem den allgemeinen Ausdruck von MN (Fig. 115). Nach 1 der Aufl. ist Nbc = $\varkappa + \varphi$, also Ncb = 180° − bNc − Nbc = 180° − $(\gamma + \varkappa + \varphi)$, und MBb = 180° − $(\beta + \gamma)$: man hat also,

$$\text{Mb} = \frac{\text{BM Sin. MBb}}{\text{Sin. MbB}} = \frac{\text{BM Sin.} (\beta + \gamma)}{\text{Sin.} \gamma}$$

$$= \frac{a \text{ Sin.} \varphi \text{ Sin.} (\beta + \gamma)}{\text{Sin.} \gamma^2},$$

$$\text{Nb} = \frac{\text{bc Sin. Ncb}}{\text{Sin. bNc}} = \frac{b \text{ Sin.} (\gamma + \varkappa + \varphi)}{\text{Sin.} \gamma},$$

und daher,

$$\text{MN} = \text{Mb} + \text{Nb} =$$

$$\frac{a \text{ Sin.} \varphi \text{ Sin.} (\beta + \gamma)}{\text{Sin.} \gamma^2} + \frac{b \text{ Sin.} (\gamma + \varkappa + \varphi)}{\text{Sin.} \gamma}$$

Wendet man nun diesen Ausdruck auf Fig. 116 an: so hat man a = 815, b = 670, Sin. φ = − Sin. 89° 25′ 53″, Sin. γ = − Sin. 124° 16′ = − Sin. 55° 44′, Sin. $(\beta + \gamma)$ = Sin. − 99° 21 = − Sin. 80° 39′, Sin. $(\gamma + \varkappa + \varphi)$ = Sin. − 579° 10′ 53″ = − Sin. 219° 10′ 53″ = Sin. 39° 10′ 53″. Hieraus erhält man,

$$\frac{a \text{Sin.} \phi \text{ Sin.} (\beta + \gamma)}{\text{Sin.} \gamma^2} = 1177,4171$$

$$\frac{b \text{ Sin.} (\gamma + \varkappa + \phi)}{\text{Sin.} \gamma} = -512,1946,$$

und daher M′N′ (Fig. 116) = 665,2225.

Constr. Man beschreibe (Fig. 117) um AB, CD, als Sehnen, zwey Kreise, so daß der Bogen BkA den Winkel α, und der Bogen ClD den Winkel ζ in sich faßt; nehme hierauf den Bogen BkH = 2β, und den Bogen ClJ = 2ε, ziehe HI, und beschreibe um diese Linie als Sehne einen solchen Kreis, daß der Bogen HNI den Winkel $\gamma + \delta$ in sich faßt; mache alsdann den Bogen HK = 2γ, oder IK = 2δ, und ziehe durch K und C die Linie KC, welche verlängert den Kreis in N schneidet. Ziehet man nun noch die Linien HN, IN, welche die beyden anderen Kreise in M, P, schneiden: so sind M, N, P, die drey gesuchten Punkte. Man wird nämlich haben AMB = α, BMN = β, CNM = γ, CNP δ, CPN = ε, CPD = ζ.

Der Beweis dieser Construktion gründet sich auf den Satz, daß der Peripheriewinkel halb so viele Grade hat, als der Bogen, worauf er stehet, und ist leicht zu finden.

§ 104.

Aufg. Vier Punkte sind ihrer Lage und Entfernung nach gegeben: es werden die Lage und Entfernungen zweyer anderen Punkte gesucht, aus deren jedem man, außer dem anderen gesuchten Punkte, nicht mehr als zwey von den gegebenen sehen kann.

Aufl. A, B, C, D, (Fig. 118), seyen die vier gegebenen Punkte, M, N, die beyden gesuchten; aus M kann bloß A, B, N, und aus N bloß C, D, M, gesehen werden. Man messe in M, N, die Winkel AMB = α, BMN = β, CNM

$= \gamma$, CND $= \delta$. Es sey ferner gegeben, AB $=$ a, BC $=$ b, CD $=$ c, ABC $=$ B, BCD $=$ C.

1) Wäre der Winkel MAB bekannt: so hätte man alles Uebrige. Man setze daher MAB $= \varphi$, und ziehe Bb der CN und bc der BC parallel. Vergleicht man nun Fig. 118 mit Fig. 115: so zeigt der erste Anblick, daß, wenn man in jener das Dreyeck CDN, und in dieser das Viereck CDPN hinwegnimmt, alles Uebrige, sogar die Bezeichnung der Winkel und Seiten übereinstimmt. Man hat daher auch hier, wie im vorigen §, wenn man der Kürze wegen $B + \alpha + \beta - 360^\circ = \varkappa$ setzt,

$$Bb = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma}, \quad Nc = \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma},$$

und daher,

$$NC = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma} + \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma}.$$

2) Im Sechsecke ABCDNM (Fig. 118) sind alle Winkel zusammen $= 8\text{R} = 720^\circ$. Man hat daher CDN $= 720^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B + C + \varphi)$; oder, wenn man $720^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + B + C) = \lambda$ setzt, CDN $= \lambda - \varphi$. Das Dreyeck CDN giebt also,

$$CN = \frac{c \text{ Sin. } (\lambda - \varphi)}{\text{Sin. } \delta}.$$

3) Setzt man die beyden in 2 und 3 für CN gefundenen Ausdrücke einander gleich: so erhält man die Gleichung,

$$\frac{c \text{ Sin. } (\lambda - \varphi)}{\text{Sin. } \delta} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma} + \frac{b \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \gamma}$$

und diese Gleichung giebt, wenn man mit derselben wie mit einer ähnlichen in § 103 verfährt,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\delta + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\lambda}{-b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda}.$$

Beysp. A′, B′, C′, D′, (Fig. 119), seyen die vier gegebenen Punkte, und M′, N′, die beyden Punkte, deren Lage gesucht wird, und bey denen angenommen wird, daß aus M′ bloß A′, B′, N′, und aus N′ bloß C′, D′, M′, gesehen werden könne. Die gemessenen Winkel sind folgende: A′M′B′ $= 86^\circ\,54'$, B′M′N′ $= 46^\circ\,51'$, C′N′M′ $= 138^\circ\,21'$, C′N′D $= 87^\circ\,25'$. Gegeben sind die Linien A′B′ $= 760$, B′C′ $= 800$, C′D′ $= 720$, und die Winkel A′B′C′ $= 30^\circ\,20'$, B′C′D′ $= 39^\circ\,34'$.

Die Vergleichung der Fig. 119 mit Fig. 118 zeigt sogleich die Verwandschaft derselben, und zwar ergiebt sich daraus: $a = 760$, $b = 800$, $c = 720$, $B = 30^\circ\,20'$, $C = -39^\circ\,34'$, $\alpha = -86^\circ\,54'$, $\beta = 46^\circ\,51'$, $\gamma = -138^\circ\,21'$, $\delta = -87^\circ\,25'$. Für dieses Beyspiel ist also $\varkappa = -369^\circ\,43'$, $\lambda = 995^\circ\,3'$, und daher $\text{Sin.}\,\varkappa = \text{Sin.} -369^\circ\,43' = -\text{Sin.}\,369^\circ\,43' = -\text{Sin.}\,9^\circ\,43'$, $\text{Cos.}\,\varkappa = \text{Cos.} -369^\circ\,43' = \text{Cos.}\,369^\circ\,43' = \text{Cos.}\,9^\circ\,43'$, $\text{Sin.}\,\lambda = \text{Sin.}\,995^\circ\,3' = \text{Sin.}\,275^\circ\,3' = -\text{Sin.}\,84^\circ\,57'$, $\text{Cos.}\,\lambda = \text{Cos.}\,995^\circ\,3' = \text{Cos.}\,275^\circ\,3' = \text{Cos.}\,84^\circ\,57'$. Die fortgesetzte Rechnung giebt,

$$\begin{aligned}
a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\delta &= -553{,}9063\\
b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\varkappa &= 786{,}5693\\
c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\lambda &= 42{,}0580\\
b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\varkappa &= -134{,}6863\\
c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda &= -475{,}9416.
\end{aligned}$$

Man hat also,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{-553{,}9063 + 786{,}5693 + 42{,}0580}{134{,}6863 - 475{,}9416} = \frac{+274{,}7210}{-341{,}2553}$$
$$= -0{,}8050307.$$

Demnach ist entweder $\varphi = 128° 50' 6''$, oder $\varphi = -51° 9' 54''$. Der erste von diesen beyden Werthen kann hier nicht statt haben, weil sonst $A'M'B' + M'A'B'$ größer als 180° wäre. Man hat also $\varphi = -51° 9' 54''$, und daher $M'A'B = 51° 9' 54''$.

Nachdem der Winkel $M'A'B'$ gefunden worden, ist es leicht die übrigen nicht gegebenen Winkel der Figur zu bestimmen. Es ist nämlich $A'B'M' = 180° - (A'M'B + B'A'M') = 41° 56' 6''$, $C'B'M' = A'B'M' + A'B'C' = 72° 16' 6''$. Da nun im Vierecke $B'C'N'M'$ der konvexe Winkel $C'N'M' = 221° 39'$, $B'M'N' = 46° 51'$, $C'B'M' = 72° 16' 6''$; so ist $B'C'N' = 19° 13' 54''$, demnach $D'C'N' = B'C'N' + B'C'D = 58° 47' 54''$ und $C'D'N' = 180° - (D'C'N' + C'N'D') = 33° 47' 6''$.

Zweyt. Beysp. A', B', C', D', (Fig. 120), seyen vier in einer geraden Linie liegende Punkte, deren Entfernungen von einander gegeben sind, und zwar ist $AB = 840$, $BC = 110$, $CD = 500$. M' und N' sind zwey Punkte, deren Lage gesucht wird; aus M' kann bloß A', B', N', und aus N' bloß C', D', M', gesehen werden. Dieser Voraussetzung gemäß sind in M' und N' die Winkel gemessen worden, welche die gesehenen Punkte mit einander machen, und es wurde gefunden, $A'M'B' = 105° 47'$, $B'M'N' = 65° 31'$, $C'N'M = 35° 54'$, $C'N'D' = 91° 35'$.

Vergleicht man Fig. 120 mit Fig. 118: so ergiebt sich, $a = 840$, $b = 110$, $c = 500$, $B = 0$, $C = 180°$, $\alpha = -105° 47'$, $\beta = 65° 31'$, $\gamma = 35° 34'$, $\delta = -91° 35'$. Man hat also $\varkappa = -400° 16'$, $\lambda = 636° 17'$, und demnach $\text{Sin. } \varkappa = -\text{Sin. } 400° 16' = -\text{Sin. } 40° 16'$, $\text{Cos. } \varkappa = \text{Cos. } 400° 16' = \text{Cos. } 40° 16'$, $\text{Sin. } \lambda = \text{Sin. } 276° 17' = -\text{Sin. } 83° 43'$, $\text{Cos. } \lambda = \text{Cos. } 276° 17' = \text{Cos. } 83° 43'$. Ferner ist

$$a \text{ Sin. } \beta \text{ Sin. } \delta = -764{,}1770$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Cos. } \varkappa = 80{,}7395$$
$$c \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \lambda = -30{,}6293$$
$$b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \delta \text{ Sin. } \varkappa = -68{,}3913$$
$$c \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \lambda = 278{,}1787.$$

Man hat daher,

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{-764{,}1770 + 80{,}7395 - 30{,}6293}{68{,}3913 + 278{,}1787}$$
$$= -2{,}0603826,$$

also entweder $\varphi = 154^\circ\ 6'\ 38''$, oder $\varphi = -25^\circ\ 53'\ 22''$. Der erste von diesen beyden Werthen kann hier nicht gebraucht werden, weil sonst $B'A'M' + A'M'B' > 180^\circ$ wäre. Man hat demnach $B'A'M' = 25^\circ\ 53'\ 22''$, woraus sich alles Uebrige in der Figur bestimmen läßt.

Zus. Man kann auch jedesmal, wenn man es für gut findet, aus der für irgend eine Figur berechneten Formel, eine besondere Formel für jede verwandte Figur ableiten. Um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, will ich annehmen, man wollte aus Fig. 120 eine Formel für den Winkel $B'A'M'$ finden, welche für alle, dieser ähnliche, Figuren gelte. Man setze zu dem Ende, $A'M'B' = \alpha'$, $B'M'N' = \beta'$, $C'N'M = \gamma'$, $C'N'D' = \delta'$, $B'A'M' = \varphi'$; alsdann giebt die Vergleichung mit Fig. 118: $\alpha = -\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = -\delta'$, $B = 0$, $C = 180^\circ$. Man hat also $\varkappa = -\alpha' + \beta' - 360^\circ$, $\lambda = 720^\circ - (-\alpha' + \beta' + \gamma' - \delta' + 180^\circ) = 540^\circ + \alpha' - \beta' - \gamma' + \delta'$. Werden diese Werthe in der Gleichung in 3 substituirt: so erhält man,

$$-\text{Cot. } \varphi' = \frac{-a \text{ Sin.} \beta' \text{ Sin.} \delta' + b \text{ Sin.} \alpha' \text{ Sin.} \delta' \text{ Cos.} \varkappa - c \text{ Sin.} \alpha' \text{ Sin.} \gamma' \text{ Cos.} \lambda}{-b \text{ Sin.} \alpha' \text{ Sin.} \delta' \text{ Sin.} \varkappa - c \text{ Sin.} \alpha \text{ Sin.} \gamma' \text{ Sin.} \lambda}$$

oder,

$$\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{-\text{a Sin.}\beta'\,\text{Sin.}\delta' + \text{b Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Cos.}\varkappa - \text{c Sin.}\varkappa\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Cos.}\lambda}{\text{b Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Sin.}\varkappa + \text{c Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Sin.}\lambda}.$$

Man kann auch diese Formel unmittelbar aus der Figur selbst finden. Man ziehe zu dem Ende B′b′ der C′N′ parallel, welche der verlängerten M′N′ in b′ begegnet, und aus b′ die b′c′ der B′C′ parallel, welche der verlängerten C′N′ in c′ begegnet. Alsdann ist $M'b'B' = M'N'C' = \gamma'$; folglich $M'B'b' = 180^\circ - (\beta' + \gamma')$. Ferner ist $M'B'A' = 180^\circ - (\alpha' + \varphi')$, und daher $M'B'b' = C'c'b' = D'C'N' = M'B'b' - M'B'A' = \alpha' + \varphi' - \beta' - \gamma'$, und $N'b'c' = 180^\circ - C'c'b' - b'N'c' = 180^\circ - \alpha' + \beta' + \gamma' - \varphi' - \gamma' = 180^\circ - \alpha' + \beta' - \varphi'$. Auch ist $C'D'N' = 180^\circ - D'C'N' - C'N'D' = 180^\circ - \alpha' - \varphi' + \beta' + \gamma' - \delta'$. Setzt man demnach, $180^\circ - \alpha' + \beta' = \varkappa'$, $180^\circ - \alpha' + \beta' + \gamma' - \delta' = \lambda'$: so ist $N'b'c' = \varkappa' - \varphi'$, $C'D'N' = \lambda' - \varphi'$.

Hieraus erhält man im Dreyecke b′N′c′

$$N'c' = \frac{b'c'\,\text{Sin.}\,N'b'c'}{\text{Sin.}\,b'N'c'} = \frac{\text{b Sin.}(\varkappa' - \varphi)}{\text{Sin.}\,\gamma'},$$

im Dreyecke A′M′B′,

$$B'M' = \frac{A'B'\,\text{Sin.}\,B'A'M'}{\text{Sin.}\,M'B'A'} = \frac{\text{a Sin.}\,\varphi'}{\text{Sin.}\,\alpha'},$$

im Dreyecke M′B′b′,

$$B'b' = \frac{M'B'\,\text{Sin.}\,B'M'b}{\text{Sin.}\,M'b'B'} = \frac{\text{a Sin.}\,\varphi'\,\text{Sin.}\,\beta'}{\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'},$$

im Dreyecke C′N′D′,

$$C'N' = \frac{C'D'\,\text{Sin.}\,C'D'N'}{\text{Sin.}\,C'N'D'} = \frac{\text{c Sin.}(\lambda' - \varphi')}{\text{Sin.}\,\delta'}.$$

Da nun $B'b' = C'N' + N'c'$: so hat man die Gleichung,

$$\frac{\text{a Sin.}\,\varphi'\,\text{Sin.}\,\beta'}{\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'} = \frac{\text{c Sin.}(\lambda - \varphi')}{\text{Sin.}\,\delta'} + \frac{\text{b Sin.}(\varkappa' - \varphi')}{\text{Sin.}\,\gamma'},$$

wor-

woraus man durch das gewöhnliche Verfahren erhält,

$$\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta'\,\text{Sin.}\,\delta' + b\,\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Cos.}\,\varkappa' + c\,\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Cos.}\,\lambda'}{b\,\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Sin.}\,\varkappa' + c\,\text{Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Sin.}\,\lambda'},$$

Um die Uebereinstimmung dieser Formel mit der vorigen einzusehen, darf man nur $\varkappa$ und λ durch $\varkappa'$ und λ' ausdrücken. Da nun $\varkappa = \varkappa' - 540^0$, $\lambda = 720^0 - \lambda'$: so ist $\text{Sin.}\,\varkappa = \text{Sin.}\,(\varkappa' - 540^0) = -\text{Sin.}\,(540^0 - \varkappa') = -\text{Sin.}\,(180^0 - \varkappa') = -\text{Sin.}\,\varkappa'$, $\text{Cos.}\,\varkappa = \text{Cos.}\,(\varkappa' - 540^0) = \text{Cos.}\,(540^0 - \varkappa') = \text{Cos.}\,(180^0 - \varkappa') = -\text{Cos.}\,\varkappa'$, $\text{Sin.}\,\lambda = \text{Sin.}\,(720^0 - \lambda') = \text{Sin.} - \lambda' = -\text{Sin.}\,\lambda'$, $\text{Cos.}\,(720^0 - \lambda') = \text{Cos.} - \lambda' = \text{Cos.}\,\lambda'$. Substituirt man diese Werthe von $\text{Sin.}\,\varkappa$, $\text{Cos.}\,\varkappa$, $\text{Sin.}\,\lambda$, $\text{Cos.}\,\lambda$, in der ersten Formel: so erhält man die zweyte.

§ 105.

Von den dreyen in § 102, 103, 104, aufgelösten Aufgaben, ist die in § 103 die allgemeinste; sie schließt die beyden anderen als einzelne Fälle in sich. Außerdem giebt es aber noch einige andere merkwürdige Fälle, deren Auflösung sich ohne viele Mühe daraus ableiten läßt. Wie dies geschiehet, soll nun gezeigt werden.

Erster Fall. Der Punkt P, (Fig. 115), rücke in die Linie CN, wie Fig. 121 zeigt. Für diesen Fall wird in § 103, $\delta = 0$, $\varepsilon = 180^0$, und demnach $\text{Sin.}\,\delta = 0$, $\text{Sin.}\,\varepsilon = 0$. Macht man diese Substitution in der daselbst für $\text{Cot.}\,\varphi$ gefundenen Formel: so wird $\text{Cot.}\,\varphi = \frac{0}{0}$, welches den Werth desselben unbestimmt läßt. Einen Ausdruck von dieser Art mußte man aber auch nothwendig erhalten, weil der Ort des Punktes P auf der Linie CN nicht angegeben worden ist.

Man dividire den Zähler und Nenner des erwähnten Ausdruckes durch Sin. δ; dies giebt,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\zeta + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Cos.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\lambda\,.\,\dfrac{\text{Sin.}\,\varepsilon}{\text{Sin.}\,\delta}}{-b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda\,.\,\dfrac{\text{Sin.}\,\varepsilon}{\text{Sin.}\,\delta}}.$$

Es sey nun, (Fig. 115), CN = f, CP = g. Alsdann ist $\frac{\text{Sin.}\,\varepsilon}{\text{Sin.}\,\delta} = \frac{f}{g}$, und

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\zeta + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Cos.}\,\varkappa + \dfrac{cf}{g}\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\lambda}{-b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\varkappa + \dfrac{cf}{g}\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda};$$

worin

$\varkappa = B + \alpha + \beta - 360°$, $\lambda = 900° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + B + C)$. Dieser Ausdruck bleibt immer richtig, wo auch der Punkt P liegen mag; also auch alsdann, wenn er, wie in Fig. 121, auf CN fällt. Für diesen Fall wird aber $\delta = 0$, $\varepsilon = 180°$, folglich $\lambda = 720° - (\alpha + \beta + \gamma + \zeta + B + C)$.

Man setze nun, (Fig. 121), f = g: so fällt P auf N, und die Figur gehet in Fig. 118 über. Man hat alsdann,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\zeta + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Cos.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\lambda}{-b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\varkappa + c\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda}.$$

welches mit § 104 völlig übereinstimmt, wenn man nur, der dortigen Bezeichnung gemäß, δ für ζ setzt.

Zweyter Fall. Man lasse nun den Punkt D, (Fig. 118), in B rücken: so verwandelt sich diese Figur in Fig. 112,

und ζ in $-\zeta$; ferner wird $C = 0$, und $c = b$. Der so eben gefundene Ausdruck gehet alsdenn in den folgenden über:

$$\text{Cot.}\,\phi' = \frac{-a\,\text{Sin.}\beta'\,\text{Sin.}\zeta' - b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Cos.}\kappa' + b\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Cos.}\lambda}{b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\kappa' + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\lambda}.$$

wo $\kappa' = B + \alpha + \beta - 360^\circ$, $\lambda' = 720^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \zeta + B)$.

Will man nun diesen Ausdruck mit dem in § 102 für diesen Fall gefundenen vergleichen: so muß man zuvörderst, der dortigen Bezeichnung gemäß, δ für γ und γ für ζ setzen. Alsdann wird $\lambda' = 720^\circ - (\alpha + \beta + \delta - \gamma + B)$. An dem a. O. war $\kappa = B + \alpha + \beta - 360^\circ$, $\lambda = B + \alpha + \beta - \gamma + \delta - 360^\circ$; man hat also, $\kappa' = \kappa$, $\lambda' = 360^\circ - \lambda$; folglich $\text{Sin.}\,\kappa' = \text{Sin.}\,\kappa$, $\text{Cos.}\,\kappa' = \text{Cos.}\,\kappa$, $\text{Sin.}\,\lambda' = -\text{Sin.}\,\lambda$, $\text{Cos.}\,\lambda' = \text{Cos.}\,\lambda$. Die Substitution dieser Werthe in dem vorigen Ausdrucke, giebt, nach der angezeigten Abänderung in Ansehung der Buchstaben γ und ζ,

$$\text{Cot.}\,\phi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\gamma + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\kappa - b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Cos.}\,\lambda}{-b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\kappa + b\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\delta\,\text{Sin.}\,\kappa},$$

welches mit § 102 völlig übereinstimmt.

Dritter Fall. Ich will nun annehmen, die Punkte A, B, C, D, M, N, P, in Fig. 115, hätten die Lage von A', B', C', D', M', N', P', (Fig. 122), und man sollte für diese und alle ihr ähnliche Figuren eine besondere Formel finden, wodurch die Lage von M', N', P', bestimmt wird. Es seyen die gemessenen Winkel, $A'M'B' = \alpha'$, $B'M'N' = \beta'$, $C'N'M' = \gamma'$, $C'N'P' = \delta'$, $C'P'N' = \varepsilon'$ $C'P'D' = \zeta'$, die gegebenen $A'B'C' = B'$, $B'C'D' = C'$. Der gesuchte Winkel $M'A'B'$ sey $= \phi'$.

Die Vergleichung zwischen Fig. 115 und Fig. 122 giebt,

in Beziehung auf § 103, $B = B'$, $C = C'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = -\gamma'$, $\delta = \delta'$, $\varepsilon = \varepsilon'$, $\zeta = \zeta'$, $\varphi = \varphi'$; die Substitution dieser Werthe in der daselbst für Cot. φ gefundenen Formel, giebt demnach,

$$\mathrm{Cot.}\ \varphi' = \frac{\left[\begin{array}{c} a\ \mathrm{Sin.}\ \beta'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta' + b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta'\ \mathrm{Cos.}\ \varkappa' \\ -\ c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ '\ \mathrm{Sin.}\ \varepsilon'\ \mathrm{Cos.}\ \lambda \end{array}\right]}{-\ b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta'\ \mathrm{Sin.}\ \varkappa' - c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \gamma'\ \mathrm{Sin.}\ \varepsilon'\ \mathrm{Sin.}\ \lambda'},$$

worin $\varkappa' = B' + \alpha' + \beta' - 360^\circ$, $\lambda' = 900^\circ - (\alpha' + \beta' - \gamma' + \delta' + \varepsilon' + \zeta' + B' + C')$.

Vierter Fall. A', B', C', D', (Fig. 123), seyen die vier gegebenen Punkte, M', N', P', die drey, deren Lage gesucht wird. Man hat folgende Winkel gemessen: $A'M'B = \alpha'$, $B'M'N' = \beta'$, $C'N'M' = \gamma'$, $C'N'P' = \delta'$, $C'P'N' = \varepsilon'$, $C'P'D' = \zeta'$. Gegeben sind die Winkel, $A'B'C' = B'$, $B'C'D' = C'$, und die Seiten, $A'B' = a$, $B'C' = b$, $C'D' = c$, der gesuchte Winkel $M'A'B' = \varphi'$. Die Vergleichung mit dem Schema Fig. 115, giebt, $\alpha = -\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = -\delta'$, $\varepsilon = -\varepsilon'$, $\zeta = -\zeta'$, $B = B'$, $C = C'$, $\varphi = -\varphi'$. Die Substitution dieser Werthe, in der Formel § 103, giebt,

$$-\ \mathrm{Cot.}\ \varphi' = \frac{\left[\begin{array}{c} a\ \mathrm{Sin.}\ \beta'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta' - b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta'\ \mathrm{Cos.}\ \varkappa' \\ +\ c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \gamma'\ \mathrm{Sin.}\ '\ \mathrm{Cos.}\ \lambda' \end{array}\right]}{b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta'\ \mathrm{Sin.}\ \varkappa' + c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \gamma'\ \mathrm{Sin.}\ \varepsilon'\ \mathrm{Sin.}\ \lambda'},$$

oder,

$$\mathrm{Cot.}\ \varphi' = \frac{\left[\begin{array}{c} -\ a\ \mathrm{Sin.}\ \beta'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta' + b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \varkappa'\ \mathrm{Cos.}\ \varkappa' \\ -\ c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \gamma'\ \mathrm{Sin.}\ \varepsilon'\ \mathrm{Cos.}\ \lambda' \end{array}\right]}{b\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \delta'\ \mathrm{Sin.}\ \zeta'\ \mathrm{Sin.}\ \varkappa' + c\ \mathrm{Sin.}\ \alpha'\ \mathrm{Sin.}\ \gamma'\ \mathrm{Sin.}\ \varepsilon'\ \mathrm{Sin.}\ \lambda'}$$

worin $\varkappa' = B' - \alpha' + \beta' - 360°$; $\lambda' = 900° - (-\alpha' + \beta' + \gamma' - \delta' - \varepsilon' - \zeta' + B' + C')$.

Fünfter Fall. A', B', C', D', (Fig. 124), sollen die vier gegebenen, und M', N', P', die drey gesuchten Punkte seyn; die letzteren liegen hier in gerader Linie. Es sey $A'B'C' = B'$, $B'C'D' = C'$, $A'M'B' = \alpha'$, $B'M'N' = \beta'$, $C'N'M' = \gamma'$, $C'N'P' = \delta' = 180° - \gamma'$, $C'P'N' = \varepsilon'$, $C'P'D' = \zeta'$; der gesuchte Winkel $M'A'B' = \varphi'$. Die Vergleichung mit Fig. 115, giebt, $\alpha = \alpha'$, $\beta = -\beta'$, $\gamma = -\gamma'$, $\delta = -\delta'$, $\varepsilon = -\varepsilon'$, $\zeta = \zeta'$, $B = B'$, $C = C'$, $\varphi = \varphi'$. Die Substitution dieser Werthe in der Formel § 103 giebt demnach,

$$\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{\left[\begin{array}{l}\text{a Sin.}\,\beta'\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Sin.}\,\zeta' - \text{b Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Sin.}\,\zeta'\,\text{Cos.}\,\varkappa' \\ \qquad + \text{c Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Sin.}\,\varepsilon'\,\text{Cos.}\,\lambda'\end{array}\right]}{\text{b Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Sin.}\,\zeta'\,\text{Sin.}\,\varkappa' + \text{c Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Sin.}\,\varepsilon'\,\text{Sin.}\,\lambda'}$$

oder, da $\text{Sin.}\,\delta' = \text{Sin.}\,\gamma'$,

$$\text{Cot}\,\varphi' = \frac{\text{a Sin.}\,\beta'\,\text{Sin.}\,\zeta' - \text{b Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\zeta'\,\text{Cos.}\,\varkappa' + \text{c Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\varepsilon'\,\text{Cos.}\,\lambda'}{\text{b Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\zeta'\,\text{Sin.}\,\varkappa' + \text{c Sin.}\,\alpha'\,\text{Sin.}\,\varepsilon'\,\text{Sin.}\,\lambda'},$$

worin

$\varkappa' = B' + \alpha' - \beta' - 360°$, $\lambda' = 900° - (\alpha' - \beta' - \gamma' - \delta' - \varepsilon' + \zeta' + B' + C') = 1080° - (\alpha' - \beta' - \varepsilon' + \zeta' + B' + C')$, weil $\gamma' + \delta' = 180°$. Der Winkel $M'A'B'$, und folglich auch die Lage der Punkte M' und P', hängt also für diesen Fall nicht von den Winkeln γ', δ', ab, wie auch seyn muß.

Fallen die Punkte C', D', auf die Linie A'B': so bleibt die hier für Cot. φ' gefundene Formel unverändert; aber die Buchstaben $\varkappa'$ und λ' erhalten, nach der Ordnung, in welcher die Punkte A', B', C', D', neben einander liegen, verschiede-

ne Werthe. Hätten z. B. diese vier Punkte die Folge, A′, D′, B′, C′: so wäre B′ = 180°, C′ = 0; folglich $\varkappa' = \alpha' - \beta' - 180°$, $\lambda = 900° - (\alpha' - \beta' - \varepsilon' + \zeta')$. Folgten sie nach der Ordnung, D′, A′, B′, C′, auf einander: so wäre wieder B′ = 180°, C′ = 0, und $\varkappa'$, λ', hätten die nämlichen Werthe. Folgten sie in der Ordnung A′, B′, C′, D′, auf einander: so wäre B′ = 180°, C′ = 180°, und demnach $\varkappa' = \alpha' - \beta' - 180°$, $\lambda' = 540° - (\alpha' - \beta' - \varepsilon' + \zeta')$.

Sechster Fall. A′, B′, C′, D′, (Fig. 125), ist ein gegebenes Viereck; M′, N′, sind zwey Punkte, deren Lage bestimmt werden soll. Aus M′ kann bloß die Seite A′B′ und der Punkt N′; aus N′ bloß die Seite C′D′ und der Punkt M′ gesehen werden. Die gemessenen Winkel sind A′M′B′ = α', B′M′N′ = β', C′N′M′ = γ', C′N′D′ = δ'. Gegeben ist, A′B′ = a, B′C′ = b′, C′D′ = c, A′B′C′ = B′, B′C′D′ = C′. Der gesuchte Winkel M′A′B′ sey = φ. Die Vergleichung mit dem Schema Fig. 118 giebt, in Beziehung auf § 104, B = B′, C = C′, $\alpha = -\alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = -\delta'$, $\varphi = -\varphi'$. Durch die Substitution dieser Werthe in der daselbst für Cot. φ gefundenen Formel, erhält man,

$$-\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{-a\,\text{Sin.}\beta'\,\text{Sin.}\delta' + b\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Cos.}\varkappa' - c\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Cos.}\lambda'}{-b\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Sin.}\varkappa' - c\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Sin.}\lambda'}$$

oder,

$$\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{-a\,\text{Sin.}\beta'\,\text{Sin.}\delta' + b\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Cos.}\varkappa' - c\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Cos.}\lambda'}{b\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\delta'\,\text{Sin.}\varkappa' + c\,\text{Sin.}\alpha'\,\text{Sin.}\gamma'\,\text{Sin.}\lambda'}$$

worin

$\varkappa' = B' - \alpha' + \beta' - 360°$, $\lambda' = 720° - (-\alpha' + \beta' + \gamma' - \delta' + B' + C')$.

Man lasse nun den Punkt D′ in A′ rücken. Alsdann

wird a $=$ o, das Viereck $A'B'C'D'$ verwandelt sich in ein Dreyeck, und man erhält,

$$\text{Cot.}\,\varphi' = \frac{b\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Cos.}\,\varkappa' - c\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Cos.}\,\lambda'}{b\,\text{Sin.}\,\delta'\,\text{Sin.}\,\varkappa' - c\,\text{Sin.}\,\gamma'\,\text{Sin.}\,\lambda'}.$$

§ 106.

Man kann auch, wenn man will, die Formel für jede einzelne verwandte Figur unmittelbar aus dieser Figur selbst entwickeln, wie schon § 104 an einem Beispiele gezeigt worden. Da dies eine, für angehende Geometer sehr nützliche Uebung ist: so will ich hier noch ein Beyspiel hersetzen, und dazu den vierten Fall des vorigen §'s wählen.

Man ziehe, (Fig. 123), $B'b'$ der $C'N'$ parallel, welche der verlängerten $M'N'$ in b' begegnet, und aus b' die $b'c'$ der $B'C'$ parallel. Man hat alsdann, $B'b'M' = 180° - C'N'M' = 180° - \gamma'$, $M'B'b' = B'M'N' - B'b'M' = \beta' + \gamma' - 180°$, $AB'M' = 180° - (A'M'B' + M'A'B') = 180° - (\alpha' + \varphi')$, $C'B'b' = A'B'C' + A'B'M' + M'B'b' = B' + \beta' + \gamma' - \alpha' - \varphi' = C'c'b'$, $N'b'c' = C'c'b' - C'N'M'$ $B' + \beta' - \alpha' - \varphi'$; ferner $B'C'c' = 180° - C'c'b' = 180° - B' - \beta' - \gamma' + \alpha' + \varphi'$, $D'C'N' = B'C'c' - B'C'D' = 180° - B' - C' - \beta' - \gamma' + \alpha' + \varphi'$; also im Vierecke $D'C'N'P'$, $C'D'P' = 360° - D'C'N' - C'N'P' - N'P'D' = 360° - D'C'N' - C'N'P' - C'P'N' - C'P'D' = 180° + B' + C' + \beta' + \gamma' - \alpha' - \varphi' - \delta' - \varepsilon' - \zeta'$. Setzt man daher, der Kürze wegen, $B' + \beta' - \alpha' = \varkappa''$, $180° + B' + C' + \beta' + \gamma' - \alpha' - \delta' - \varepsilon' - \zeta' = \lambda''$: so ist $N'b'c' = \varkappa'' - \varphi'$, $C'D'P' = \lambda'' - \varphi'$.

Man hat also im Dreyecke $A'B'M'$,

$$B'M' = \frac{A'B'\,\text{Sin.}\,M'A'B'}{\text{Sin.}\,A'M'B'} = \frac{a\,\text{Sin.}\,\varphi'}{\text{Sin.}\,\alpha'},$$

im Drenecke $B'b'M'$,

$$B'b' = \frac{B'M' \text{Sin.} B'M'b}{\text{Sin.} B'b'M'} = \frac{a \text{Sin.} \phi' \text{Sin.} \beta'}{\text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \gamma'},$$

im Drenecke $N'b'c'$,

$$N'c' = \frac{b'c' \text{Sin.} N'b'c'}{\text{Sin.} c'N'b'} = \frac{b \text{Sin.} (\varkappa'' - \phi)}{\text{Sin.} \gamma'},$$

im Drenecke $C'D'P'$,

$$C'P' = \frac{C'D' \text{Sin.} C'D'P}{\text{Sin.} C'P'D} = \frac{c \text{Sin.} (\lambda'' - \phi')}{\text{Sin.} \zeta'},$$

im Drenecke $C'P'N'$,

$$C'N' = \frac{C'P' \text{Sin.} C'P'N}{\text{Sin.} C'N'P'} = \frac{c \text{Sin.} (\lambda'' - \phi') \text{Sin.} \varepsilon'}{\text{Sin.} \delta' \text{Sin.} \zeta'}.$$

Nun ist $C'N' = C'c' + N'c' = B'b' + N'c'$: man hat also die Gleichung

$$\frac{c \text{Sin.} (\lambda'' - \phi') \text{Sin.} \varepsilon'}{\text{Sin.} \delta' \text{Sin.} \gamma'} = \frac{a \text{Sin.} \phi' \text{Sin.} \beta'}{\text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \gamma'} + \frac{b \text{Sin.} (\varkappa'' - \phi')}{\text{Sin.} \gamma'}.$$

woraus man erhält,

$$\text{Cot.} \phi' = \frac{\left[\begin{array}{l} a \text{Sin.} \beta' \text{Sin.} \delta' \text{Sin.} \zeta' - b \text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \delta' \text{Sin.} \zeta' \text{Cos.} \varkappa'' \\ \qquad + c \text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \gamma' \text{Sin.} \varepsilon' \text{Cos.} \lambda'' \end{array}\right]}{-b \text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \delta' \text{Sin.} \zeta' \text{Sin.} \varkappa'' + c \text{Sin.} \alpha' \text{Sin.} \gamma' \text{Sin.} \varepsilon' \text{Sin.} \lambda''}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel für den vierten Fall des vorigen §'s: so findet man $\varkappa'' = 360^\circ + \varkappa'$, $\lambda'' = 1080^\circ - \lambda'$; folglich $\text{Sin.} \varkappa'' = \text{Sin.} \varkappa'$, $\text{Cos.} \varkappa'' = \text{Cos.} \varkappa'$, $\text{Sin.} \lambda'' = -\text{Sin.} \lambda'$, $\text{Cos.} \lambda'' = \text{Cos.} \lambda'$, woraus die Gleichheit beyder Formeln erhellet.

§ 107.

Aufg. Fünf unzugängliche Punkte sind ihrer Lage und Entfernung nach gegeben; man soll die Lage von vier anderen Punkten bestimmen.

Aufl. A, B, C, D, E, (Fig. 126), sollen die fünf ge-

gebenen, M, N, P, Q, die vier gesuchten Punkte seyn. Aus M kann bloß A, B, N, aus N bloß C, M, P, aus P bloß D, N, Q, und aus Q bloß D, E, P, gesehen werden. Es seyen die gegebenen Linien und Winkel, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $ABC = B$, $BCD = C$, $CDE = D$; die gemessenen Winkel $AMB = \alpha$, $BMN = \beta$, $CNM = \gamma$, $CNP = \delta$, $DPN = \varepsilon$, $DPQ = \zeta$, $DQP = \eta$, $DQE = \theta$. Ferner sey der gesuchte Winkel $MAB = \varphi$.

1) Man ziehe Bb der CN, bc der BC, cd der DP, und de der CD parallel. Alsdann ist $BbM = CNM = \gamma$, $CdN = DPN = \varepsilon$; folglich $MBb = 180° - (BMb + BbM) = 180° - (\beta + \gamma)$, $NCd = 180° - (\delta + \varepsilon)$. Ferner ist im Vierecke ABbM, $ABb = 360° - (AMb + BbM + MAB) = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)$, und im Fünfecke ABCNM, $BCN = 540° - (ABC + AMN + CNM + MAB) = 540° - (B + \alpha + \beta + \gamma + \varphi)$. Man hat also, $bBC = ABC - ABb = B + \alpha + \beta + \gamma + \varphi - 360° = Ccb$, $dCD = BCD - BCN - NCd = B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi - 720° = Ded$, und demnach $Nbc = Ccb - bNC = B + \alpha + \beta + \varphi - 360°$; $Pde = Ded - dPD = B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varphi - 720°$. Ferner ist im Neunecke ABCDEQPNM, der Winkel $DEQ = 1260° - (ABC + BCD + CDE + AMN + MNP + NPQ + MAB) = 1260° - (B + C + D + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta + \varphi)$. Setzt man nun, zur Abkürzung, $B + \alpha + \beta - 360° = \varkappa$, $B + C + \alpha + \beta + \gamma + \delta - 720° = \lambda$, $1260° - (B + C + D + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta + \theta) = \mu$: so ist $Nbc = \varkappa + \varphi$, $Pde = \lambda + \varphi$, $DEQ = \mu - \varphi$.

2) Im Dreyecke ABM ist,

$$BM = \frac{AB \text{ Sin. } MAB}{\text{Sin. } AMB} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } \alpha};$$

im Dreyecke MBb,

$$Bb = \frac{BM\ Sin.\ BMb}{Sin.\ BbM} = \frac{a\ Sin.\ \phi\ Sin.\ \beta}{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma};$$

im Dreyecke Nbc,

$$Nc = \frac{bc\ Sin.\ Nbc}{Sin.\ bNc} = \frac{b\ Sin.\ (\varkappa + \phi)}{Sin.\ \gamma};$$

folglich $CN = Cc + Nc = Bb + Nc =$

$$\frac{a\ Sin.\ \phi\ Sin.\ \beta}{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma} + \frac{b\ Sin.\ (\varkappa + \phi)}{Sin.\ \gamma}.$$

Ferner ist im Dreyecke NCd,

$$Cd = \frac{CN\ Sin.\ CNd}{Sin.\ CdN} = \frac{CN\ Sin.\ \delta}{Sin.\ \varepsilon},$$

und im Dreyecke Pde,

$$Pe = \frac{de\ Sin.\ Pde}{Sin.\ dPe} = \frac{c\ Sin.\ (\lambda + \phi)}{Sin.\ \varepsilon};$$

folglich $DP = De + Pe = Cd + Pe =$

$$\frac{CN\ Sin.\ \delta}{Sin.\ \varepsilon} + \frac{c\ Sin.\ (\lambda + \phi)}{Sin.\ \varepsilon} =$$

$$\frac{a\ Sin.\ \phi\ Sin.\ \beta\ Sin.\ \delta}{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma\ Sin.\ \varepsilon} + \frac{b\ Sin.\ (\varkappa + \phi)\ Sin.\ \delta}{Sin.\ \gamma\ Sin.\ \varepsilon} + \frac{c\ Sin.\ (\lambda + \phi)}{Sin.\ \varepsilon}.$$

3) Es läßt sich aber auch noch ein anderer Ausdruck für DP finden. Es ist nämlich im Dreyecke DEQ,

$$DQ = \frac{DE\ Sin.\ DEQ}{Sin.\ DQE} = \frac{d\ Sin.\ (\mu - \phi)}{Sin.\ \theta},$$

und im Dreyecke DPQ,

$$DP = \frac{DQ\ Sin.\ DQP}{Sin.\ DPQ} = \frac{d\ Sin.\ (\mu - \phi)\ Sin.\ \eta}{Sin.\ \theta\ Sin.\ \zeta}.$$

4) Setzt man die in 2 und 3 für DP gefundenen Ausdrücke einander gleich: so erhält man die Gleichung,

$$\frac{a \,\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\delta}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon} + \frac{b\,\text{Sin.}\,(\varkappa+\varphi)\,\text{Sin.}\,\delta}{\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon} + \frac{c\,\text{Sin.}\,(\lambda+\varphi)}{\text{Sin.}\,\varepsilon} = \frac{d\,\text{Sin.}\,(\mu-\varphi)\,\text{Sin.}\,\eta}{\text{Sin.}\,\theta\,\text{Sin.}\,\zeta},$$

oder, wenn man $\text{Sin.}\,(\varkappa+\varphi)$, $\text{Sin.}\,(\lambda+\varphi)$, $\text{Sin.}\,(\mu-\varphi)$ entwickelt, durch $\text{Sin.}\,\varphi$ dividirt, und $\text{Cot.}\,\varphi$ für $\frac{\text{Cos.}\,\varphi}{\text{Sin.}\,\varphi}$ setzt,

$$\frac{a\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,\delta}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon} + \frac{b\,\text{Sin.}\,\delta\,(\text{Sin.}\,\varkappa\,\text{Cot.}\,\varphi + \text{Cos.}\,\varkappa)}{\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,\varepsilon} + \frac{c\,(\text{Sin.}\,\lambda\,\text{Cot.}\,\varphi + \text{Cos.}\,\lambda)}{\text{Sin.}\,\varepsilon} = \frac{d\,\text{Sin.}\,\eta\,(\text{Sin.}\,\mu\,\text{Cot.}\,\varphi - \text{Cos.}\,\mu)}{\text{Sin.}\,\theta\,\text{Sin.}\,\zeta}.$$

Hieraus erhält man,

$$\text{Cot.}\,\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l} a\,\text{Sin.}\beta\,\text{Sin.}\delta\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Sin.}\theta + b\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\delta\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Sin.}\theta\,\text{Cos.}\varkappa + \\ c\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Sin.}\theta\,\text{Cos.}\lambda + d\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\eta\,\text{Cos.}\mu \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} -b\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\delta\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Sin.}\theta\,\text{Sin.}\varkappa - c\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Sin.}\zeta\,\text{Sin.}\theta\,\text{Sin.}\lambda \\ + d\,\text{Sin.}\alpha\,\text{Sin.}\gamma\,\text{Sin.}\varepsilon\,\text{Sin.}\eta\,\text{Sin.}\mu \end{array}\right]}$$

Anmerk. Auf eine ähnliche Art läßt sich überhaupt die Aufgabe auflösen, wenn n Punkte gegeben sind, die Lage von n — 1 anderen Punkten zu bestimmen.

§ 108.

Aufg. In einem Vierecke sind zwey gegenüber liegende Seiten, nebst den Winkeln, welche dieselben mit einer der beyden anderen Seiten machen, gegeben. Dieses Viereck wird aus irgend einem Standpunkte gesehen, und daselbst die scheinbaren Entfernungen der Eckpunkte von einander gemessen: man soll hieraus die beyden anderen Seiten desselben, und die Entfernung des Standpunktes von jedem Eckpunkte finden.

Aufl. ABCD, (Fig. 127), sey das Viereck, M der

Standpunkt, die gegebenen Seiten $AB = a$, $CD = b$, und Winkel, $ABC = B$, $BCD = C$. Die gemessenen Winkel $ABM = \alpha$, $BMC = \beta$, $CMD = \gamma$.

1) Wüßte man den Winkel MAB: so hätte man auch alles Uebrige in der Figur. Man setze daher $MAB = \varphi$. Alsdann ist $ABM = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$, $MBC = ABC - ABM = B + \alpha + \varphi - 180^\circ$, $BCM = 180^\circ - (MBC + BMC) = 360^\circ - (B + \alpha + \beta + \varphi)$. Ferner ist in dem Fünfecke MABCD, $MDC = 540^\circ - (B + C + \alpha + \beta + \gamma + \varphi)$. Man setze zur Abkürzung $B + \alpha - 180^\circ = \varkappa$, $360^\circ - (B + \alpha + \beta) = \lambda$, $540^\circ - (B + C + \alpha + \beta + \gamma) = \mu$; dies giebt, $MBC = \varkappa + \varphi$, $BCM = \lambda - \varphi$, $MDC = \mu - \varphi$.

2) Im Dreyecke ABM ist,

$$BM = \frac{AB \text{ Sin. } MAB}{\text{Sin. } AMB} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } \alpha},$$

und im Dreyecke BMC,

$$MC = \frac{BM \text{ Sin. } MBC}{\text{Sin. } BCM} = \frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda - \varphi)}.$$

Im Dreyecke MCD ist ferner,

$$MC = \frac{CD \text{ Sin. } MDC}{\text{Sin. } CMD} = \frac{b \text{ Sin. } (\mu - \varphi)}{\text{Sin. } \gamma}.$$

3) Setzt man die beyden für MC gefundenen Werthe einander gleich: so erhält man,

$$\frac{a \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi)}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda - \varphi)} = \frac{b \text{ Sin. } (\mu - \varphi)}{\text{Sin. } \gamma},$$

oder,

$$a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varphi \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi) = b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda - \varphi) \text{ Sin. } (\mu - \varphi).$$

4) Nun ist $\text{Sin. } \varphi \text{ Sin. } (\varkappa + \varphi) = \frac{1}{2}[\text{Cos. } \varkappa - \text{Cos. } (\varkappa + 2\varphi)]$, $\text{Sin. } (\lambda - \varphi) \text{ Sin. } (\mu - \varphi) = \frac{1}{2}[\text{Cos. } (\lambda - \mu) - \text{Cos. } (\lambda + \mu - 2\varphi)]$ (§. 14); man hat also,

$$a \text{ Sin. } \gamma [\text{Cos. } \varkappa - \text{Cos. } (\varkappa + 2\varphi)] =$$
$$b \text{ Sin. } \alpha [\text{Cos. } (\lambda - \mu) - \text{Cos. } (\lambda + \mu - 2\varphi)],$$

oder,

$$a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda - \mu) =$$
$$a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } (\varkappa + 2\varphi) - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda + \mu - 2\varphi).$$

Da nun $\text{Cos. } (\varkappa + 2\varphi) = \text{Cos. } \varkappa \text{ Cos. } 2\varphi - \text{Sin. } \varkappa \text{ Sin. } 2\varphi$, $\text{Cos.} (\lambda + \mu - 2\varphi) = \text{Cos.} (\lambda + \mu) \text{ Cos. } 2\varphi + \text{Sin.} (\lambda + \mu) \text{Sin. } 2\varphi$: so ist,

$$a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda - \mu) =$$
$$[a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda + \mu)] \text{ Cos. } 2\varphi$$
$$- [a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa + b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda + \mu)] \text{ Sin. } 2\varphi.$$

5) Man dividire diese Gleichung durch $a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa + b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda + \mu)$, und setze

$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda + \mu)}{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa + b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda + \mu)} = \text{Tang. } \omega;$$

dies giebt,

$$\text{Tang. } \omega \text{ Cos. } 2\varphi - \text{Sin. } 2\varphi =$$
$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda - \mu)}{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa + b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda + \mu)},$$

oder, da $\text{Tang. } \omega \text{ Cos. } 2\varphi - \text{Sin. } 2\varphi =$

$$\frac{\text{Sin } \omega \text{ Cos. } 2\varphi - \text{Cos. } \omega \text{ Sin. } 2\varphi}{\text{Cos. } \omega} = \frac{\text{Sin. } (\omega - 2\varphi)}{\text{Cos. } \omega},$$

$$\text{Sin. } (\omega - 2\varphi) =$$
$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } \varkappa \text{ Cos. } \omega - b \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } (\lambda - \mu) \text{ Cos. } \omega}{a \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } \varkappa + b \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\lambda + \mu)};$$

woraus sich φ bestimmen läßt.

Beysp. Es sey $a = 360$, $b = 300$, $B = 140° 26'$, $C = 136° 22'$, $\alpha = 36° 20'$, $\beta = 29° 41'$, $\gamma = 27° 38'$. Hier ist $\varkappa = -3° 14'$, $\lambda = 153° 33'$, $\mu = 169° 33'$,

$$a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma\,\mathrm{Cos.}\,\varkappa = 166{,}7063$$
$$b\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\,\mathrm{Cos.}\,(\lambda+\mu) = 142{,}1396$$
$$a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma\,\mathrm{Sin.}\,\varkappa = -\ 9{,}4176$$
$$b\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\,\mathrm{Sin.}\,(\lambda+\mu) = -106{,}7214;$$

folglich,

$$\mathrm{Tang.}\,\omega = \frac{166{,}7063 - 142{,}1396}{-9{,}4176 - 106{,}7214} = -0{,}2115284$$

und daher,

$$\omega = 168^\circ\,3'\,23''.$$

Man hat demnach,

$$a\,\mathrm{Sin.}\,\gamma\,\mathrm{Cos.}\,\varkappa\,\mathrm{Cos.}\,\omega = -163{,}0974$$
$$b\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\,\mathrm{Cos.}\,(\lambda-\mu)\,\mathrm{Cos.}\,\omega = -167{,}1602,$$

und daher,

$$\mathrm{Sin.}(\omega - 2\phi) = \frac{-163{,}0974 + 167{,}1602}{-9{,}4176 - 106{,}7214} = -0{,}0349822$$
$$\omega - 2\phi = -2^\circ\,0'\,10''$$
$$\phi = 85^\circ\,1'\,46''.$$

§ 109.

Aufg. Vier Gegenstände werden aus vier Standpunkten gesehen, und in jedem dieser Standpunkte die scheinbaren Entfernungen der Gegenstände von einander gemessen: man soll daraus die Lage aller acht Punkte bestimmen.

Aufl. Die vier Gegenstände A, B, C, D, (Fig. 128), werden aus den vier Standpunkten E, F, G, H, gesehen, und daselbst die Winkel AEB $= \alpha$, CEC $= \beta$, CED $= \gamma$, AFB $= \alpha'$, BFC $= \beta'$, CGD $= \gamma'$, AGB $= \alpha''$, BGC $= \beta''$, CGD $= \gamma''$, AHB $= \alpha'''$, BHC $= \beta'''$, CHD $= \gamma'''$ gemessen.

1) Man verbinde die Punkte A, B, C, D, (Fig. 129) durch die Linien, AB, BC, CD, und suche zuerst eine Glei-

chung für den Punkt E. Zu dem Ende verlängere man die Linien BC, EA, ED, bis sie in F, G, zusammen stoßen, und ziehe die Perpendikel AH, DI, EK. Da hier bloß Winkel gegeben sind: so läßt sich nicht die wirkliche Größe der in der Figur vorhandenen Linien, sondern bloß ihr Verhältniß gegen einander bestimmen. Man kann daher eine dieser Linien, etwa BC, für die Einheit annehmen, und BC = 1 setzen. Wären nun noch die Linien AB, CD, und die Winkel ABC, BCD, oder ihre Nebenwinkel ABF, DCG, bekannt: so wäre die Lage der vier Punkte A, B, C, D, und somit auch die Lage der Punkte E, F, G, H, bestimmt. Man setze daher AB = x, CD = y, ABF = φ, DCG = ψ, und überdies, der Kürze wegen, BAE = A, CDE = D, welche beyde letztere Winkel weiterhin aus der Rechnung wegfallen werden. Man hat alsdann, AFB = BAE − ABF = A − φ, CGD = CDE − DCG = D − ψ, CBE = AFB + AEB = A − φ + α, BCE = CGD + CED = D − ψ + γ.

2) Im Dreyecke ABE ist,

$$BE = \frac{AB \operatorname{Sin.} BAE}{\operatorname{Sin.} AEB} = \frac{x \operatorname{Sin.} A}{\operatorname{Sin.} \alpha},$$

und im Dreyecke CED,

$$CE = \frac{CD \operatorname{Sin.} CDE}{\operatorname{Sin.} CED} = \frac{y \operatorname{Sin.} D}{\operatorname{Sin.} \gamma};$$

folglich im rechtwinklichten Dreyecke BEK,

$$BK = BE \operatorname{Cos.} CBE = \frac{y \operatorname{Sin.} A \operatorname{Cos.} (A - \varphi + \alpha)}{\operatorname{Sin.} \alpha},$$

und im rechtwinklichten Dreyecke CEK,

$$CK = CE \operatorname{Cos.} BCE = \frac{y \operatorname{Sin.} D \operatorname{Cos.} (D - \psi + \gamma)}{\operatorname{Sin.} \gamma}.$$

Da nun BK + CK = BC = 1: so hat man die Gleichung,

$$\frac{x \text{ Sin. } A \text{ Cos. } (A - \phi + \alpha)}{\text{Sin. } \alpha} + \frac{y \text{ Sin. } D \text{ Cos. } (D - \psi + \gamma)}{\text{Sin. } \gamma} = 1,$$

oder,

$$x \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } A \text{ Cos. } (A - \phi + \alpha) + y \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } D \text{ Cos. } (D - \psi + \gamma)$$
$$= \text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma.$$

3) Es ist aber, (§. 10), $\text{Cos. } (A - \phi + \alpha) = \text{Cos. } [A - (\phi - \alpha)] = \text{Cos. } A \text{ Cos. } (\phi - \alpha) + \text{Sin. } A \text{ Sin. } (\phi - \alpha)$, $\text{Cos. } (D - \psi + \gamma) = \text{Cos. } [D - (\psi - \gamma)] = \text{Cos. } D \text{ Cos. } (\psi - \gamma) + \text{Sin. } D \text{ Sin. } (\psi - \gamma)$. Man substituire diese Werthe in der gefundenen Gleichung, und setze zugleich $1 - \text{Cos. } A^2$ für $\text{Sin. } A^2$, $1 - \text{Cos. } D^2$ für $\text{Sin. } D^2$; dies giebt, $\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } \gamma =$

$$x \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } A [\text{Sin. } A \text{ Cos. } (\phi - \alpha) - \text{Cos. } A \text{ Sin. } (\phi - \alpha)]$$
$$+ x \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } (\phi - \alpha) + y \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } D [\text{Sin. } D \text{ Cos. } (\psi - \gamma)$$
$$- \text{Cos. } D \text{ Sin. } (\psi - \gamma)] + y \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\psi - \gamma)$$
$$= x \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } A \text{ Sin. } (A - \phi + \alpha) + x \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } (\phi - \alpha) +$$
$$y \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } D \text{ Sin. } (D - \psi + \gamma) + y \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\psi - \gamma)$$
$$= x \text{ Sin. } \gamma \text{ Cos. } A \text{ Sin. } CBE + x \text{ Sin. } \gamma \text{ Sin. } (\phi - \alpha) +$$
$$y \text{ Sin. } \alpha \text{ Cos. } D \text{ Sin. } BCE + y \text{ Sin. } \alpha \text{ Sin. } (\psi - \gamma).$$

4) Im Dreyecke BEC hat man,

$$BC = 1 = \frac{BE \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } BCE} = \frac{x \text{ Sin. } A \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha \text{ Sin. } BCE},$$

und daher,

$$\text{Sin. } BCE = \frac{x \text{ Sin. } A \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \alpha}.$$

Eben so ist,

$$BC = 1 = \frac{CE \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } CBE} = \frac{y \text{ Sin. } D \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \gamma \text{ Sin. } CBE},$$

und daher,

$$\text{Sin. } CBE = \frac{y \text{ Sin. } D \text{ Sin. } \beta}{\text{Sin. } \gamma}.$$

Man

Man substituire diese Werthe von Sin. BCE, Sin. CBE in der Gleichung in 3; dies giebt, $\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma =$

$$xy\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,D\,\text{Cos.}\,A + x\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,(\varphi - \alpha) + xy\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,A\,\text{Cos.}\,D + y\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,(\psi - \gamma) = xy\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,(A + D) + x\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,(\varphi - \alpha) + y\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,(\psi - \gamma)$$

oder, da $A + D = 540^\circ - (AED + ABC + BCD) = 180^\circ - (E - \varphi - \psi)$, wenn man, der Kürze wegen, $AED = E$ setzt,

$$\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma = xy\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,[E - (\varphi + \psi)] + x\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Sin.}\,(\varphi - \alpha) + y\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,(\psi - \gamma).$$

5) Um die unbekannten Größen von den bekannten abzusondern, entwickele man diese Gleichung; dies giebt,

$$\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma = xy\,\text{Sin.}\,\beta\,[\text{Sin.}\,E\,\text{Cos.}\,(\varphi + \psi) - \text{Cos.}\,E\,\text{Sin.}\,(\varphi + \psi)] + x\,\text{Sin.}\,\gamma\,(\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\alpha) + y\,\text{Sin.}\,\alpha\,(\text{Sin.}\,\psi\,\text{Cos.}\,\gamma - \text{Cos.}\,\psi\,\text{Sin.}\,\gamma)$$
$$= xy\,\text{Sin.}\,\beta\,[\text{Sin.}\,E\,(\text{Cos.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\psi - \text{Sin.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\psi) - \text{Cos.}\,E\,(\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\psi + \text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\psi)] + x\,\text{Sin.}\,\gamma\,(\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\alpha) + y\,\text{Sin.}\,\alpha\,(\text{Sin.}\,\psi\,\text{Cos.}\,\gamma - \text{Cos.}\,\psi\,\text{Sin.}\,\gamma).$$

6) Setzt man $x\,\text{Sin.}\,\varphi = p$, $x\,\text{Cos.}\,\varphi = q$, $y\,\text{Sin.}\,\psi = r$, $y\,\text{Cos.}\,\psi = s$; so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$(qs - pr)\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,E - (ps + qr)\,\text{Sin.}\,\beta\,\text{Cos.}\,E + p\,\text{Sin.}\,\gamma\,\text{Cos.}\,\alpha + r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\gamma - (q + s + 1)\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma = 0,$$

oder,

$$(qs - pr)\,\frac{\text{Sin.}\,\beta\,\text{Sin.}\,E}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma} - (ps + qr)\,\frac{\text{Sin.}\,\beta\,\text{Cos.}\,E}{\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\gamma} + p\,\text{Cot.}\,\alpha + r\,\text{Cot.}\,\gamma - (q + s + 1) = 0,$$

worin $E = \alpha + \beta + \gamma$.

Eine ähnliche Gleichung giebt auch jeder von den übrigen Standpunkten F, G, H. Man hat also in allem vier Gleichungen, woraus sich nun ferner die Werthe von $qs - pr$, $ps + qr$, p, r, $q + s + 1$, und hieraus die Werthe von p, q, r, s, bestimmen lassen. Sind diese letzteren gefunden: so hat man auch die Werthe von x, y, φ, ψ. Eine vollständige Auflösung der erwähnten vier Buchstaben-Gleichungen vom Hrn. Prof. Pfleiderer findet man im Archiv für reine und angew. Mathem. 10tes Heft S. 190. In der Ausübung ist es indessen weit leichter, mit den gegebenen Zahlen selbst zu rechnen; wie dies geschiehet, wird das folgende Beyspiel lehren.

Beysp. Ich will annehmen, die Punkte E, F, G, H, hätten eine solche Lage, wie Fig. 130 zeigt. Es sey $\alpha = AEB = 39^\circ\,38'$, $\beta = BEC = 30^\circ\,54'$, $\gamma = CED = 23^\circ\,21'$, $\alpha' = AFB = 67^\circ\,23'$, $\beta' = BFC = 44^\circ\,44'$, $\gamma' = CFD = 28^\circ\,54'$, $\alpha'' = AGB = 75^\circ\,48'$, $\beta'' = BGC = 105^\circ\,51'$, $\gamma'' = CGD = 50^\circ\,23'$, $\alpha''' = -AHB = -25^\circ\,47'$, $\beta''' = -BHC = -55^\circ\,2'$, $\gamma''' = CHD = 15^\circ\,30'$. Hier ist $E = \alpha + \beta + \gamma = 93^\circ\,53'$, $F = \alpha' + \beta' + \gamma' = 141^\circ\,1'$, $G = \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 232^\circ\,2'$, $H = \alpha''' + \beta''' + \gamma''' = -65^\circ\,19'$. Demnach ist,

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta\ \text{Sin.}\,E}{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma} = 2{,}0266000$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta\ \text{Cos.}\,E}{\text{Sin.}\,\alpha\ \text{Sin.}\,\gamma} = -0{,}1375675$$

$$\text{Cot.}\,\alpha = 1{,}2073615$$

$$\text{Cot.}\,\gamma = 2{,}3164076$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta'\ \text{Sin.}\,F}{\text{Sin.}\,\alpha'\ \text{Sin.}\,\gamma'} = 0{,}9924784$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta'\ \text{Cos.}\,F}{\text{Sin.}\,\alpha'\ \text{Sin.}\,\gamma'} = -1{,}2263381$$

$$\text{Cot.}\,\alpha' = 0{,}4166012$$

$$\text{Cot.}\,\gamma' = 1{,}8114969$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta''\ \text{Sin.}\,G}{\text{Sin.}\,\alpha''\ \text{Sin.}\,\gamma''} = -1{,}0155390$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta''\ \text{Cos.}\,G}{\text{Sin.}\,\alpha''\ \text{Sin.}\,\gamma''} = -0{,}7924751$$

$$\text{Cot.}\,\alpha'' = 0{,}2530389$$

$$\text{Cot.}\,\gamma'' = 0{,}8277620$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta'''\ \text{Sin.}\,H}{\text{Sin.}\,\alpha'''\ \text{Sin.}\,\gamma'''} = -6{,}4057632$$

$$\frac{\text{Sin.}\,\beta'''\ \text{Cos.}\,H}{\text{Sin.}\,\alpha'''\ \text{Sin.}\,\gamma'''} = 2{,}9440655$$

$$\text{Cot.}\,\alpha''' = -2{,}0701359$$

$$\text{Cot.}\,\gamma''' = 3{,}6058835.$$

Man hat also folgende vier Gleichungen:

$$2{,}0266000\,(qs - pr) + 0{,}1375675\,(ps + qr) + 1{,}2073615\,p + 2{,}3164076\,r - (q + s + 1) = 0$$

$$0{,}9924784\,(qs - pr) + 1{,}2263381\,(ps + qr) + 0{,}4166012\,p + 1{,}8114969\,r - (q + s + 1) = 0$$

$$-1{,}0155390\,(qs - pr) + 0{,}7924751\,(ps + qr) + 0{,}2530389\,p + 0{,}8277620\,r - (q + s + 1) = 0$$

$$-6{,}4057632\,(qs - pr) - 2{,}9440655\,(ps + qr) - 2{,}0701359\,p + 3{,}6058835\,r - (q + s + 1) = 0.$$

Wird die zweyte, dritte und vierte Gleichung von der ersten abgezogen, so erhält man,

$$1{,}0341216(qs - pr) - 1{,}0887706(ps + qr) + 0{,}7907603\,p + 0{,}5049107\,r = 0$$

$$3{,}0421390(qs - pr) - 0{,}6549076(ps + qr) + 0{,}9543226\,p + 1{,}4886456\,r = 0$$

$$8{,}4323632(qs - pr) + 3{,}0816330(ps + qr) + 3{,}2774974\,p - 1{,}2894759\,r = 0.$$

Man dividire die Coefficienten einer jeden Gleichung durch den Coefficienten des ersten Gliedes; dies giebt,

$$(qs - pr) - 1{,}0528458\,(ps + qr) + 0{,}7646686\,p + 0{,}4882508\,r = 0$$

$$(qs - pr) - 0{,}2152786\,(ps + qr) + 0{,}3137012\,p + 0{,}4893417\,r = 0$$

$$(qs - pr) + 0{,}3654531\,(ps + qr) + 0{,}3886808\,p - 0{,}1529199\,r = 0$$

und wenn die beyden ersten Gleichungen von der letztern abgezogen werden,

$$1{,}4182989(ps + qr) - 0{,}3759878\,p - 0{,}6411707\,r = 0$$
$$0{,}5807317(ps + qr) + 0{,}0749796\,p - 0{,}6422616\,r = 0.$$

Man dividire wieder jede Gleichung durch den Coefficienten des ersten Gliedes; dies giebt,

$$(ps + qr) - 0{,}2650977\,p - 0{,}4520702\,r = 0$$
$$(ps + qr) + 0{,}1291123\,p - 1{,}1059524\,r = 0,$$

und wenn man diese Gleichungen von einander abziehet,

$$0{,}3942100\,p - 0{,}6538822\,r = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung bekommt man, indem man stufenweise zurück gehet, folgende vier Gleichungen,

$$r = 0{,}6028762\,p$$
$$pt + qr = 0{,}5376401\,p$$
$$qs - pr = -0{,}4929713\,p$$
$$q + s + 1 = 1{,}6787747\,p$$

Aus der ersten und zweyten Gleichung bekommt man,

$$s + 0{,}6028762\,q = 0{,}5376401.$$

Diese Gleichung, verbunden mit der vierten, giebt,

$$q = 4{,}2273334\,p - 3{,}8719414$$
$$s = -2{,}5485587\,p + 2{,}8719414.$$

Setzt man nun die Werthe von q, r, s, in die vierte Gleichung: so erhält man,

$$11{,}3764835\,p^2 - 22{,}5014950\,p + 11{,}1199888 = 0$$

oder,

$$p^2 - 1{,}9778955\,p + 0{,}9774540 = 0;$$

und diese Gleichung giebt,

$$p = 0{,}9889477 \pm 0{,}0237403,$$

also entweder $p = 1{,}0126880$, oder $p = 0{,}9652074$. Die beyden letzten Ziffern dieser Werthe sind ungewiß.

Nimmt man den ersten Werth des p: so findet man,

$$p = 1{,}0126880 = x\,\text{Sin.}\,\varphi$$
$$q = 0{,}4090284 = x\,\text{Cos.}\,\varphi$$
$$r = 0{,}6105255 = y\,\text{Sin.}\,\psi$$
$$s = 0{,}2910466 = y\,\text{Cos.}\,\psi.$$

Aus der ersten und zweyten Gleichung erhält man,

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{1{,}0126880}{0{,}4090284} = 2{,}4758378,$$

und aus der dritten und vierten,

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{0{,}6105255}{0{,}2910466} = 2{,}0976898;$$

folglich

$$\varphi = 68^\circ\ 0'\ 21'',7,\quad \psi = 64^\circ\ 30'\ 43'',8$$

und

$$x = \frac{p}{\text{Sin. }\varphi} = 1{,}09217,\ y = \frac{r}{\text{Sin. }\psi} = 0{,}67635.$$

Nimmt man den zweyten Werth des p: so hat man,

$$p = 0{,}9652074 = x\ \text{Sin. }\varphi$$
$$q = 0{,}2083121 = x\ \text{Cos. }\varphi$$
$$r = 0{,}5819006 = y\ \text{Sin. }\psi$$
$$s = 0{,}4120537 = y\ \text{Cos. }\psi$$

und demnach,

$$\text{Tang. }\varphi = \frac{0{,}9652074}{0{,}2083121} = 4{,}6334677$$

$$\text{Tang. }\psi = \frac{0{,}5819006}{0{,}4120537} = 1{,}4121960$$

$$\varphi = 77^\circ\ 49'\ 16'',1,\quad \psi = 54^\circ\ 41'\ 49'',3$$

$$x = \frac{p}{\text{Sin. }\varphi} = 0{,}98743,\ y = \frac{r}{\text{Sin. }\psi} = 0{,}71301.$$

Es sind also bey jeder solchen Aufgabe zwey verschiedene Lagen der acht Punkte möglich. Welche die rechte sey, muß daher aus anderen Umständen entschieden werden.

Nachdem die Lage der vier Punkte A, B, C, D, vermittelst der berechneten Winkel und Linien φ, ψ, x, y, bestimmt worden, ist es leicht, mit Hülfe der Aufgabe in § 54 die Lage der Punkte E, F, G, H, zu bestimmen.

Anmerk. Die hier aufgelöste Aufgabe, unleugbar die wichtigste in der praktischen Geometrie, ist von unserem großen Lambert; man findet sie in seinen Beyträgen I S. 186, u. f. Er brauchte bey der Berechnung seines Beyspiels nur vier Decimalstellen; daher konnten die daselbst für P, Q, R, S, oder, nach meiner Bezeichnung, für p, q, r, s, gefundenen Werthe, nicht einmal bis auf so viele

Decimalstellen richtig seyn. Nach Lambert S. 193 ist nämlich, P = 0,5690, Q = —0,3443 (—0,3543 ist ein Druckfehler), R = —0,4998, S = —0,3028; eigentlich ist aber P = 0,5698, Q = —0,3447, R = —0,5005, S = —0,3024. Für die Winkel φ und ψ, (nach der hier gebrauchten Bezeichnung,) würde man bey jenen Angaben nur die Grade richtig gefunden haben, welches bey der Bestimmung der übrigen Stücke der Figur bedeutende Fehler verursacht hätte. Man thut daher wohl, die Rechnung durchgängig mit sechs Decimalstellen zu führen.

Zu diesem Abschnitte gehört auch noch die erste Abhandlung der vortrefflichen Schrift des Hrn. Hauptmanns v. Hügenin (Mathematische Beyträge zur weiteren Ausbildung angehender Geometer. Königsb. 1803), welche die Leser gewiß nicht ohne Nutzen und Vergnügen aus der Hand legen werden.

X. Vom Maximum und Minimum, in so fern dieser Gegenstand zur Elementar-Geometrie gehört.

---

§ 110.

Erklärung.

Eine Größe wird ein Maximum genannt, wenn sie die größte unter allen ihr ähnlichen ist; ein Minimum, wenn sie die kleinste ist.

Der Durchmesser eines Kreises ist die größte unter allen Linien, welche von einem Punkte der Peripherie nach dem anderen gezogen werden können, und daher in Hinsicht auf diese Linien ein Maximum. Ferner ist unter allen Linien, welche

von irgend einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Linie gezogen werden können, die Perpendikularlinie die kleinste, und daher in Hinsicht auf jene Linien, ein Minimum.

§ 111.

Aufg. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß das Rechteck zwischen den beyden Theilen ein Maximum sey.

Aufl. Die gegebene Linie AB (Fig. 131) soll in M so getheilt werden, daß AM × MB größer sey, als jedes andere Rechteck, welches aus zwey Theilen dieser Linie formirt werden kann.

Man halbire die Linie AB in C, und setze AC = CB = $\frac{1}{2}$ AB = a, CM = x. Alsdann ist AM = a + x, BM = a — x, und AM × MB = $a^2 - x^2$. Der Ausdruck $a^2 - x^2$ ist aber offenbar am größten, wenn x = 0; daher fällt der Punkt M auf C, und demnach ist AC × CB das größte Rechteck.

Zus. Wenn also zwey Linien, die ich P, Q, nennen will, eine gegebene Summe haben: so ist das Rechteck zwischen diesen beyden Linien am größten, wenn P = Q ist. Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfange, hat folglich das Quadrat den größten Flächeninhalt.

§ 112.

Aufg. Unter allen Dreyecken, welche auf derselben Grundlinie stehen, und denselben Umfang haben, dasjenige zu finden, welches den größten Flächeninhalt hat.

Aufl. Es sey das Dreyeck ABC (Fig. 132) ein Maximum; die gegebene Grundlinie AC = a, und wegen des gegebenen Umfanges, AB + BC = b.

1) Man ziehe das Perpendikel BD: so muß dasselbe, da die Grundlinie AC bestimmt ist, ein Maximum seyn. Man halbire nun AC in E, und setze ED = x, BD = y,

$AB = z$. Alsdann ist $AD = \frac{1}{2}a - x$, $CD = \frac{1}{2}a + x$; folglich, da $AB^2 = AD^2 + BD^2$, $BC^2 = CD^2 + BD^2$,

$$z^2 = (\tfrac{1}{2}a - x)^2 + y^2$$

$$(b - z)^2 = (\tfrac{1}{2}a + x)^2 + y^2.$$

2) Ziehet man die erste Gleichung von der zweyten ab: so erhält man

$$b^2 - 2bz = 2ax$$

$$z = \tfrac{1}{2}b - \frac{ax}{b}.$$

3) Man setze diesen Werth des z in die erste Gleichung in 1; dies giebt,

$$y^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}(\tfrac{1}{4}b^2 - x^2).$$

4) Hieraus ergiebt sich, daß $y = BD$ am größten wird, wenn $x = 0$, und folglich das Perpendikel BD die Linie AC halbirt. In diesem Falle ist aber $AB = BC$: das gleichschenklichte Dreyeck ist folglich unter allen Dreyecken von demselben Umfange und derselben Grundlinie, das, welches den größten Flächeninhalt hat.

Zus. Dieses Resultat läßt sich auch auf folgende Art geometrisch erweisen.

Es sey ABC (Fig. 133) ein gleichschenklichtes Dreyeck, AMC irgend ein anderes Dreyeck auf derselben Grundlinie AC, und $AM + MC = AB + BC$: so muß erwiesen werden, daß $\triangle ABC > \triangle AMC$ sey.

Um B, als Mittelpunkt, denke man sich mit dem Halbmesser $BA = BC$ einen Kreis beschrieben, welcher der verlängerten AB in D begegnet. Ziehet man nun DC: so ist der Winkel ACD, als Winkel im Halbkreise, $= R$. Man verlängere nun das Perpendikel DC, mache $MN = MC$, und

ziehe AN. Von den Punkten B, M, ziehe man auf DN die Perpendikel BG, MP.

Da BC = BD, und MN = MC: so ist AB + BC = AD, und AM + MC = AM + MN; folglich AD = AM + MN, und daher AD > AN; und da $CD^2 = AD^2 - AC^2$, $CN^2 = AN^2 - AC^2$, so ist auch CD > CN. Da nun CG = $\frac{1}{2}$CD, CP = $\frac{1}{2}$CN: so ist auch CG > CP. Nun ist aber CG die Höhe des Dreyecks ABCD, und CP die Höhe des Dreyecks AMC; folglich hat das Dreyeck ABC eine größere Höhe, und daher auch einen größeren Flächeninhalt, als das Dreyeck AMC.

§ 113.

Aus dem vorigen § ergiebt sich folgender, wegen seiner Allgemeinheit merkwürdige Satz:

Unter allen Vielecken von gleichem Umfange, und von derselben Anzahl der Seiten, hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

Denn es sey ABCDEF (Fig. 134) das größte Vieleck. Wäre nun AB nicht gleich BC: so könnte man auf AC als Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreyeck AMC setzen, welches mit ABC gleichen Umfang hat, worin folglich AM + MC = AB + BC. Alsdann wäre nach dem vorigen §, △ AMC > △ ABC, und folglich auch das Vieleck AMCDEF, welches eben so viele Seiten, und eben den Umfang hat, als das Vieleck ABCDEF, größer als dieses. Es wäre demnach das Vieleck ABCDEF nicht das größte unter allen, welche mit ihm gleichen Umfang und gleich viele Seiten haben. Es ist also nothwendig AB = BC. Aus eben dem Grunde ist aber auch BC = CD, CD = DE, u. s. w.; folglich ist das Vieleck, welches ein Maximum seyn soll, gleichseitig.

§ 114.

Aufg. Es sind zwey Seiten eines Dreyeckes gegeben: man soll den, von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel bestimmen, wenn das Dreyeck ein Maximum seyn soll.

Aufl. ABC (Fig. 134) soll das größte unter allen Dreyecken seyn, welche dieselben Seiten AB, BC, haben.

Da $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \text{ Sin. } ABC$, und die Linien AB, BC, gegeben sind: so ist das Dreyeck das größte, für welches Sin. ABC am größten ist. Nun ist aber Sin. ABC am größten, wenn ABC ein rechter Winkel ist; folglich ist das größte Dreyeck dasjenige, in welchem die beyden gegebenen Seiten einen rechten Winkel einschließen.

§ 115.

Aufg. Alle Seiten eines Vielecks weniger eine sind gegeben: man soll die Bedingungen angeben, für welche das Vieleck ein Maximum wird.

Aufl. Es sey ABCDEF (Fig. 135) das größte von allen Vielecken, welche sich aus den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE, EF, und noch irgend einer unbestimmten Seite AF konstruiren lassen. Man ziehe die Diagonalen AD, DF: so muß ADF ein rechter Winkel seyn. Denn wäre ADF kein rechter Winkel, so könnte man, nach dem vorigen §, mit Beybehaltung der Theile ABCD, DEF, das Dreyeck ADF, und somit auch das Vieleck ABCDEF vergrößern; welches der Voraussetzung, daß dieses Vieleck ein Maximum sey, widerspricht. Eben so läßt sich erweisen, daß ABF, ACF, AEF, rechte Winkel sind. Die Punkte A, B, C, D, E, F, müssen demnach in einem Halbkreise liegen, dessen Durchmesser AF ist.

Zus. Daß es nur Ein Vieleck gebe, welches unter dieser Bedingung aus den gegebenen Seiten konstruirt werden kann, läßt sich folgendermaßen erweisen.

Zuerst ist klar, daß, wenn zwey Bogen AEB, AeB (Fig. 136) eine gleiche Sehne AB haben, der Bogen, zu welchem der größere Halbmesser gehöret, einen kleineren Winkel am Mittelpunkte hat, und daß also, wenn C und D die Mittelpunkte dieser beyden Bogen sind, ADB > ACB.

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß, wenn man einmal einen Halbkreis (Fig. 135) gefunden hat, worin sich genau die gegebenen Seiten des Vielecks AB, BC, CD, DE, EF, eintragen lassen, es nicht möglich ist, noch einen anderen zu finden, welcher das Nämliche leistet. Denn wäre der Halbmesser des andern Halbkreises größer oder kleiner als der Halbmesser des ersten: so würden im ersten Falle die Winkel am Mittelpunkte, welche den Bogen AB, BC, u. s. w. zugehören, kleiner, und im zweyten größer seyn, als vorher. In beyden Fällen könnten also diese Winkel zusammen nicht mehr zweyen rechten gleich seyn, wie doch erfordert wird.

Auf die Ordnung, in welcher die Seiten AB, BC, u. s. w. in Halbkreis eingetragen werden, kommt hierbey nichts an, da bey jeder Folge dieser Seiten, die Summe der Bogen, welche dadurch abgeschnitten werden, immer der halben Peripherie gleich ist, auch der Flächeninhalt des Vielecks ungeändert bleibt; und zwar das Letztere deshalb, weil die Summe der Segmente AB, BC, u. s. w. dieselbe bleibt.

§ 116.

Aus dem vorigen § ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen Vielecken, welche sich aus einer bestimmten Anzahl gegebener Seiten konstruiren lassen, ist dasjenige, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, das größte.

Denn es sey ABCDEFG (Fig. 137) ein im Kreise beschriebenes Vieleck, und abcdefg ein anderes, um welches sich kein Kreis beschreiben läßt, und welches mit jenem gleiche

Seiten hat, so daß ab = AB, bc = BC, cd = CD, u. s. w. Man ziehe den Durchmesser EM und die Linien AM, BM; über ab = AB setze man das Dreyeck abm ≅ ABM, und ziehe em. Nach dem vorigen § ist alsdann das Vieleck EFGAM größer als das Vieleck efgam, wofern sich nicht etwa dieses letztere Vieleck in einen Kreis einschreiben läßt, dessen Durchmesser em ist, in welchem Falle es, wie daselbst gezeigt worden, jenem an Flächeninhalt gleich ist. Aus dem nämlichen Grunde, und unter der nämlichen Bedingung, ist auch das Vieleck EDCBM größer als edcbm. Das Vieleck AMBCDEFG ist also nothwendig größer als ambcdefg; denn es kann ihm nicht gleich seyn, weil sich sonst um das ganze Vieleck ambcdefg ein Kreis beschreiben lassen müßte, welches der Voraussetzung widerspricht. Nimmt man nun von den beyden erwähnten Vielecken die gleichen Dreyecke ABM, abm hinweg: so folgt, daß das Vieleck ABCDEFG größer als das Vieleck abcdefg sey.

§ 117.

Aus § 113 und 116 ergiebt sich der folgende Satz:

Unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleich vielen Seiten, ist das reguläre Vieleck das größte.

Denn nach § 113 ist das Vieleck, welches ein Maximum seyn soll, gleichseitig, und nach dem vorigen § läßt es sich in einen Kreis beschreiben; demnach ist es regulär.

§ 118.

Aus dem vorigen § ergiebt sich ferner der folgende Satz:

Der Kreis ist größer als jede geradlinigte Figur, welche mit demselben einen gleichen Umfang hat.

Denn es wurde daselbst erwiesen, daß das reguläre Vieleck größer sey, als jedes andere von gleichem Umfange und

gleicher Anzahl der Seiten. Kann also nur noch erwiesen werden, daß der Kreis jedesmal größer sey, als ein reguläres Vieleck von gleichem Umfange: so folgt die Richtigkeit des Satzes von selbst.

Zu dem Ende sey r der Halbmesser eines Kreises, p dessen Umfang, q der Flächeninhalt desselben. Man denke sich nun irgend ein reguläres Vieleck von gleichem Umfange mit dem Kreise; das aus dem Mittelpunkte desselben, auf jede beliebige Seite gezogene Perpendikel sey $= h$; der Flächeninhalt $= q'$. Ein demselben ähnliches Vieleck denke man sich noch um den Kreis beschrieben; der Umfang desselben sey $= p'$, und der Flächeninhalt $= q''$. Alsdann ist, wie man leicht einsehen wird,

$$q = \tfrac{1}{2}rp, \quad q' = \tfrac{1}{2}hp, \quad q'' = \tfrac{1}{2}rp'.$$

Wegen der Aehnlichkeit der beyden erwähnten Vielecke hat man auch,

$$q'' : q' = r^2 : h^2.$$

Werden in dieser Proportion für q'' und q' ihre Werthe gesetzt, so erhält man,

$$\tfrac{1}{2}rp' : \tfrac{1}{2}hp = r^2 : h^2,$$

oder $$p' : p = r : h$$

und daher $$p' = \frac{pr}{h};$$

folglich $$q'' = \tfrac{1}{2}rp' = \frac{pr^2}{2h}$$

$$q'q'' = \tfrac{1}{4}p^2r^2 = q^2.$$

Man hat also $$q' : q = q : q''.$$

Da nun der Kreis immer kleiner ist, als das umschriebene Vieleck: so ist $q'' > q$, und daher auch $q > q'$. W. Z. E. W.

§ 119.

Aufg. Auf einer der Lage nach gegebenen Linie ei-

nen Punkt von solcher Beschaffenheit zu finden, daß, wenn von zwey gegebenen, außerhalb dieser Linie liegenden Punkten, zwey gerade Linien nach jenem Punkte gezogen werden, die Summe derselben ein Minimum sey.

Aufl. Es sey MN (Fig. 138) die der Lage nach gegebene Linie, C ein Punkt auf derselben, A und B die beyden gegebenen Punkte: so soll, wenn man die Linien AC, BC, ziehet, AC + BC ein Minimum seyn.

1) Man ziehe aus einem der gegebenen Punkte, etwa B, auf MN das Perpendikel BD, verlängere dasselbe, und mache DE = BD, ziehe CE, AE, und aus P, wo AE, MN, sich schneiden, die Linie BP.

2) Da BD = DE, CD = CD, CDB = CDE = R; so ist △ CDB ≌ △ CDE, und demnach CB = CE; folglich AC + CB = AC + CE. Die Summe der Linien AC, CE, und folglich auch die Summe der Linien AC, CB, wird aber am kleinsten, wenn der Punkt C in P fällt; demnach ist AP + PB ein Minimum, und daher P der gesuchte Punkt.

Zus. Da BD = DE, PD = PD, BDP = EDP: so ist △ BDP ≌ △ EDP, und daher ∠ BPD = ∠ DPE. Aber DPE = APM; folglich APM = BPD = BPN. Der gesuchte Punkt P ist also da, wo die Linien AP, BP, mit der Linie MN gleiche Winkel machen.

§ 120.

Aufg. Außerhalb eines gegebenen Kreises sind zwey Punkte gegeben: man soll auf der Peripherie desselben einen Punkt von solcher Beschaffenheit angeben, daß, wenn man aus demselben nach den gegebenen Punkten

gerade Linien ziehet, die Summe dieser beyden Linien ein **Minimum** sey.

Aufl. Es sey (Fig. 139) C der Mittelpunkt eines Kreises, M ein Punkt auf der konvexen Seite der Peripherie desselben, von solcher Lage, daß der Winkel AMC = BMC, und P irgend ein anderer Punkt auf der Peripherie. Man ziehe an M die Tangente DE; man ziehe ferner die Linien AP, BP, und aus dem Punkte Q, wo sich AP, DE, schneiden, die Linie BQ.

Da AMC = BMC, CMD = CME = R: so ist AMD = BME. Aber BQE < BME, AQD > AMD; folglich AQD > BQE, und daher nach dem vorigen §, AQ + BQ > AM + BM. Nun ist AP + BP > AQ + BQ (El. I. 21); um so mehr ist demnach AP + BP > AM + BM. Da dies richtig ist, wo auch der Punkt P angenommen werden mag: so ist M der Punkt, für welchen die Summe der Linien AM, BM, ein **Minimum** ist.

Anmerk. Obgleich die Eigenschaft, durch welche der Punkt M bestimmt wird, für den die Summe der Linien AM, BM, ein **Minimum** wird, höchst einfach ist: so läßt sich dieser Punkt doch auf keine Weise durch die Elementar-Geometrie bestimmen. Eine sehr zierliche Auflösung dieses Problems hat zwar Robert Simson gegeben, die aber, weil die Kegelschnitte dazu gebraucht werden, nicht hierher gehöret.

§ 121.

Aufg. In einem gegebenen Dreyecke einen Punkt zu bestimmen, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man aus demselben nach den Endpunkten des Dreyecks Linien ziehet, die Summe dieser Linien ein **Minimum** sey.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 140) das gegebene Dreyeck; P der Punkt, für welchen PA + PB + PC ein Minimum ist. Denkt man sich nun aus dem Punkte C mit CP einen Kreis beschrie

beschrieben: so muß nothwendig PA + PB kleiner seyn, als die Summe der Linien, welche aus den Punkten A, B, nach irgend einem anderen Punkte der Peripherie dieses Kreises gezogen werden können, weil, wenn dies nicht wäre, die Summe der drey Linien, PA, PB, PC, kein Minimum seyn könnte. Es muß daher, nach dem vorigen §, der Winkel APC = BPC seyn. Eben so läßt sich zeigen, daß APB = APC; demnach ist APB = APC = BPC, und folglich jeder Winkel = 120°.

Ist einer der Winkel des Dreyeckes größer als 120°: so ist die Aufgabe unmöglich.

Anmerk. Es lassen sich noch sehr viele das Maximum und Minimum betreffende Aufgaben vermittelst der Elementargeometrie auflösen; man findet eine große Menge dahin gehöriger Sätze in einem eigenen Werke über diesen Gegenstand von L'Huilier unter folgendem Titel: De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometrice considerata: seu de maximis et minimis. Varsaviae 1782, wie auch in seiner schon S. 174 angeführten Schrift, über die Polygonometrie. So sinnreich indessen dergleichen Elementar-Auflösungen für einzelne Fälle auch seyn mögen: so sind solche doch keinesweges zur Festsetzung allgemeiner Regeln für die Behandlung dieses Gegenstandes überhaupt geeignet. Was die Differentialrechnung, und insbesondere die von dem berühmten Lagrange erfundene Variationsrechnung, die allein schon ihren Erfinder unsterblich machen könnte, hierin leistet, bleibt den folgenden Sammlungen vorbehalten.

XI. Ebene Oerter.

§ 122.

Erklärung.

Wenn mehrere Punkte irgend eine Eigenschaft mit einander gemein haben, und alle insgesammt in einer geraden oder krummen Linie liegen: so heißt eine solche Linie der Ort jener Punkte, oder auch jedes einzelne derselben, und zwar insbesondere ein ebener Ort, wenn die Linie, worin die Punkte liegen, eine gerade Linie oder ein Kreisbogen ist. Zur Erläuterung können folgende Beyspiele dienen.

Es sey die Grundlinie eines Dreyeckes nebst dem Flächeninhalte desselben gegeben, und man soll seine Spitze finden. Die Eigenschaften, welche hier von den gesuchten Dreyecken gefordert werden, kommen unendlich vielen Dreyecken zu, und zwar liegen die Spitzen derselben insgesammt in einer geraden, der gegebenen Grundlinie parallelen Linie. Diese Linie ist demnach der Ort der gesuchten Spitze.

Es sey die Grundlinie und der Scheitelwinkel eines Dreyeckes gegeben, und es werde die Spitze desselben gesucht. Hier reichen die gegebenen Eigenschaften offenbar nicht hin, um das Dreyeck und seine Spitze völlig zu bestimmen; denn es giebt unendlich viele Punkte, welche den Forderungen der Aufgabe ein Genüge thun, und zwar liegen alle diese Punkte in einem Kreisbogen, welcher die gegebene Grundlinie des gesuchten Dreyeckes zur Sehne hat. Demnach ist dieser Kreisbogen der Ort der gesuchten Spitze.

§ 123.

Aufg. Von einem gegebenen Punkte ist eine gerade Linie gezogen, deren Endpunkt eine andere, der Lage nach gegebene gerade Linie berührt: man soll den Ort des Punktes angeben, welcher die erstere Linie nach einem bestimmten Verhältnisse theilet.

Aufl. Von einem gegebenen Punkte C (Fig. 141) sey eine beliebige Linie CH, nach einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AB gezogen, und diese Linie nach einem bestimmten Verhältnisse in I getheilt: man soll den Ort des Punktes I angeben.

Man ziehe eine willkührliche Linie CD, theile solche nach dem bestimmten Verhältnisse in E, und ziehe durch diesen Punkt die Linie FG der AB parallel: so ist diese Linie der verlangte Ort. Denn ziehet man eine willkührliche Linie CH, welche die FG in I schneidet und AB in H berührt: so ist CH : CI = CD : CE = dem gegebenen Verhältnisse.

§ 124.

Aufg. Aus einem gegebenen Punkte ist eine gerade Linie gezogen, deren Endpunkt die Peripherie eines gegebenen Kreises berührt: man soll den Ort des Punktes finden, welcher diese gerade Linie nach einem gegebenen Verhältnisse theilet.

Aufl. Es sey A (Fig. 142 und 143) der gegebene Punkt, BGM der gegebene Kreis, E der Mittelpunkt desselben, AB irgend eine aus dem Punkte A gezogene gerade Linie, und diese in C so getheilt, daß AB : AC = m : n: man soll den Ort des Punktes C angeben.

Man ziehe die Linie AE, welche die Peripherie des gegebenen Kreises in G trifft; bestimme den Punkt D so, daß AE : AD = m : n, und nachdem dieser gefunden worden,

bestimme man den Punkt F so, daß EG : DF = m : n. Man beschreibe hierauf aus D mit DF einen Kreis: so ist dieser Kreis der gesuchte Ort.

Denn man ziehe aus dem Punkte A irgend eine Linie AB, welche die Peripherien der beyden Kreise in B und C trifft, und CD, BE, nach den Mittelpunkten derselben. Da nun AE : AD = m : n, und EG : DF = m : n: so ist AE : AD = EG : DF = BE : CD, folglich BE ∥ CD, und daher AB : AC = AE : AD = m : n, wie erfordert wird.

§ 125.

Aufg. Auf einer, durch einen gegebenen Punkt gehenden Linie, sollen zwey Stücke, von diesem Punkte an, nach entgegengesetzten Richtungen abgeschnitten werden, und zwar so, daß diese Stücke ein gegebenes Verhältniß haben, und der Endpunkt des einen Stückes eine der Lage nach gegebene Linie berühre: man soll den Ort für den Endpunkt des anderen Stückes finden.

Aufl. Es sey C (Fig. 144) der gegebene Punkt, AB die der Lage nach gegebene gerade Linie, HI eine durch C gehende Linie von willkührlicher Lage, und CH : CI = m : n; der Endpunkt H der Linie CH berührt die Linie AB: man soll den Ort des Punktes I bestimmen.

Man ziehe aus C nach AB eine beliebige Linie CD, mache CD : CE = m : n, und ziehe durch den Punkt E die Parallele FG: so ist dies der verlangte Ort. Denn ziehet man durch C eine beliebige Linie HI, welche den Linien AB, FG, in H, I, begegnet, so ist CH : CI = CD : CE = m : n, wie erfordert wird.

§ 126.

Aufg. Auf einer, durch einen gegebenen Punkt gehenden geraden Linie, sind, von diesem Punkte an, zwey

Stücke nach entgegengesetzten Richtungen abgeschnitten, welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben; der Endpunkt des einen Stückes berührt einen gegebenen Kreis: man soll den Ort für den Endpunkt des anderen Stückes finden.

Aufl. Es sey CGM (Fig. 145) der gegebene Kreis, E dessen Mittelpunkt, BC eine beliebige, durch einen gegebenen Punkt A gehende gerade Linie, welche jenen Kreis in C berührt; AB, AC, seyen zwey Stücke, deren Verhältniß zu einander beständig = m : n; man soll den Ort des Punktes B bestimmen.

Man bestimme auf AE einen Punkt D so, daß AD : AE = m : n; hierauf einen Punkt F so, daß DF : EG = m : n: beschreibt man alsdann aus D mit DF einen Kreis: so ist dies der gesuchte Ort. Denn ziehet man durch A eine beliebige Linie BC, und aus B und C, wo solche die beyden Kreise trifft, die Linien BD, CE: so ist, da AD : AE = m : n, und DF : EG = m : n, auch AD : AE = DF : EG = BD : CE; folglich BD ⧣ CE, und daher AB : AC = AD : AE = m : n, wie erfordert wird.

§ 127.

Aufg. Zwey gerade Linien, welche von einem gegebenen Punkte ausgehen, und ein bestimmtes Verhältniß gegen einander haben, schließen einen gegebenen Winkel ein; der Endpunkt der einen Linie berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie: man soll den Ort für den Endpunkt der anderen finden.

Aufl. Es sey A (Fig. 146) der feste Punkt, aus dem die Linien AB, AC, gezogen sind, welche einen gegebenen Winkel BAC einschließen, und ein gegebenes Verhältniß gegeu einander haben; der Punkt B berührt die Linie BH: man soll den Ort des Punktes C finden.

Man ziehe aus A an BH eine beliebige Linie AD, mache den Winkel DAE dem gegebenen gleich, und nehme AE so groß, daß AD zu AE das gegebene Verhältniß habe; durch den Punkt E ziehe man hierauf die Linie FG, unter dem Winkel AEG = ADB: so ist diese Linie der gesuchte Ort. Denn man ziehe zwey beliebige Linien AB, AC, unter dem gegebenen Winkel BAC = DAE; alsdann ist in den Dreyecken ABD, ACE, der Winkel BAD = CAE, und ADB = AEC; folglich △ ABD ∽ △ ACE, und AB : AC = AD : AE = dem gegebenen Verhältnisse, wie erfordert wird.

§ 128.

Aufg. Zwey gerade Linien, welche von einem gegebenen Punkte ausgehen, und ein bestimmtes Verhältniß gegen einander haben, schließen einen gegebenen Winkel ein; der Endpunkt der einen Linie berührt einen gegebenen Kreis: man soll den Ort für den Endpunkt der anderen Linie finden.

Aufl. Es sey (Fig. 147) A ein gegebener Punkt, D der Mittelpunkt eines Kreises BMb, und aus A eine beliebige Linie AB nach der Peripherie dieses Kreises gezogen; an AB sey ferner ein Winkel BAC von gegebener Größe gelegt, und auf AC der Punkt C so bestimmt, daß AB : AC einem gegebenen Verhältnisse m : n gleich sey.

Man ziehe die Linie AD, welche die Peripherie des gegebenen Kreises in F schneidet, mache den Winkel DAE dem gegebenen gleich, und bestimme auf AE den Punkt E so, daß AD : AE = m : n, und hierauf den Punkt G so, daß auch DF : EG = m : n. Beschreibt man nun aus E mit EG einen Kreis: so wird dieser Kreis der gesuchte Ort seyn.

Denn es seyen AB, AC, zwey willkührliche, nach den Peripherien beyder Kreise gezogene Linien, welche einen, dem ge-

gebenen gleichen Winkel BAC einschließen nnd DB, EC gezogen: alsdann ist BAC = DAE, und folglich auch DAB = EAC. Da ferner AD : AE = m : n, und DF : EG = m : n: so ist AD : AE = DF : EG = DB : EC. Die Dreyecke DAB, EAC, sind demnach einander ähnlich, (El. VI. 7), wenn bewiesen werden kann, daß die Winkel ABD, ACE, jedesmal zugleich stumpf, recht, oder spitz sind. Nimmt man dies an: so ist AD : AE = AB : AC. Aber AD : AE = m : n; folglich auch AB : AC = m : n, und daher der Kreis, dessen Mittelpunkt E ist, der gesuchte Ort.

Daß aber die beyden Winkel ABD, ACE, die eben erwähnte Eigenschaft haben, kann auf folgende Art gezeigt werden. Man ziehe aus A an die beyden Kreise der Tangenten AM, AN, Am, An, und nach den Berührungspunkten die Halbmesser DM, DN, Em, En. Es kann nun leicht gezeigt werden, daß die Dreyecke DAM, EAm, und demnach auch die ihnen gleichen Dreyecke DAN, EAn, einander ähnlich sind; denn es ist AD : AE = DM : Em (= m : n), und AMD = AmE = R. Demnach ist der Winkel DAM = DAN = EAm = EAn, und folglich auch DAE = MAm = NAn. Wenn daher der Punkt B in M oder N fällt, so fällt der Punkt C in m oder n. Man stelle sich nun vor, der Punkt B falle zuerst in F, und folglich der Punkt C in G; alsdann wird ABD = ACE = 2 R. Rückt nun der Punkt B von F nach M, so rückt zugleich der Punkt C von G nach m, die Winkel ABD, ACE, werden immer kleiner, bleiben aber stumpf, bis B in M, und C in m rückt, in welchem Falle beyde Winkel Rechte werden. Ueber M und m hinaus, werden diese Winkel zugleich spitz, wie AbD, AcE, wenn b und c zwey zusammen gehörige Punkte sind, und bleiben es so lange, bis B und C in N und n rücken, wo sie Rechte,

und hierauf wieder stumpf werden. Die beym Beweise vorausgesetzte Bedingung ist demnach erfüllt.

§ 129.

Aufg. Auf einer Linie, welche von einem gegebenen Punkte ausgehet, werden zwey Stücke abgeschnitten, und zwar so, daß das zwischen denselben enthaltene Rechteck eine gegebene Größe hat. Der Endpunkt des einen Stückes berührt eine gerade Linie von gegebener Lage: man soll den Ort für den Endpunkt des anderen Stückes bestimmen.

Aufl. Auf der Linie AC, (Fig. 148), welche von dem gegebenen Punkte A ausgehet, sind zwey Stücke AB, BC, von solcher Größe abgeschnitten, daß das Rechteck AB × AC einen gegebenen Flächeninhalt = q hat. Der Punkt B berührt die Linie DE: man soll den Ort des Punktes C bestimmen.

Man ziehe aus A auf DE das Perpendikel AF, bestimme auf diese Linie, oder auf ihre Verlängerung, den Punkt G so, daß AF × AG = q sey; beschreibe über die Linie AG als Durchmesser einen Kreis: so wird dieser Kreis der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A eine beliebige Linie AC, und hierauf CG. Alsdann ist ACG, als Winkel im Halbkreise, ein Rechter, und demnach AFB = ACG: folglich, wegen des gemeinschaftlichen Winkels CAG, △ ACG ∽ △ AFB. Man hat also AG : AB = AC : AF, und daher AB × AC = AG × AF = q, wie erfordert wird.

§ 130.

Aufg. Auf einer, aus einem gegebenen Punkte gezogenen Linie, sollen zwey Stücke von solcher Beschaffenheit abgeschnitten werden, daß das Rechteck zwischen den beyden Stücken eine gegebene Größe habe. Der Endpunkt des einen Stückes berührt die Peripherie eines ge-

gebenen Kreises: man soll den Ort für den Endpunkt des andern bestimmen.

Aufl. Aus dem gegebenen Punkte A (Fig. 149) ist eine Linie AC gezogen, und auf derselben sind zwey Stücke AB, AC, von solcher Größe abgeschnitten, daß AB × AC einen Flächeninhalt = q hat. Der Punkt B berührt einen gegebenen Kreis BDEG: man soll den Ort des Punktes C bestimmen.

Man ziehe aus A, durch den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises, die Linie AO, welche die Peripherie desselben in D und E schneidet, und bestimme auf dieser Linie einen Punkt F so, daß AF × AD = q sey. Hierauf suche man, nach § 126, den Ort eines Punktes H, für welchen, wenn man §124 AH ziehet, und AH : AI dem gegebenen Verhältnisse AF : AE gleich macht, der Punkt I den gegebenen Kreis berühre. Der Kreis CFH sey dieser Ort; es wird alsdann, behaupte ich, dieser Kreis auch der Ort des Punktes C seyn, für welchen AC × AB = q ist.

Denn ziehet man aus A irgend eine Linie AC, welche die Peripherien der beyden Kreise in C und G trifft: so ist nach der Construktion AG : AG = AF : AE, und daher auch AC × AB : AG × AB = AF × AD : AE × AD. Nun ist (Elem. III. 36) AG × AB = AE × AD; folglich ist auch AC × AB = AF × AD = q, wie erfordert wird.

Zus. Hieraus ergiebt sich auch, daß, wenn der Punkt B die gegen A gekehrte konvexe, oder konkave Seite des gegebenen Kreises berührt, der Punkt C im ersten Falle auf die konkave, und im zweyten auf die konvexe Seite des gesuchten Kreises fällt.

§ 131.

Aufg. Aus einem gegebenen Punkte werden zwey gerade Linien unter einem gegebenen Winkel gezogen,

und auf denselben zwey Stücke von solcher Größe abgeschnitten, daß das zwischen denselben enthaltene Rechteck einen gegebenen Flächeninhalt hat. Der Endpunkt des einen Stückes berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie: man soll den Ort für den Endpunkt des anderen Stückes bestimmen.

Aufl. Aus dem gegebenen Punkte A (Fig. 150) sind zwey Linien AB, AC, gezogen, und zwar so, daß der Winkel BAC eine gegebene Größe, und das Rechteck AB × AC einen gegebenen Flächeninhalt = q hat; der Punkt B liegt in der geraden Linie DE: man soll den Ort des Punktes C bestimmen.

Man ziehe auf DE das Perpendikel AF, mache den Winkel FAG den gegebenen gleich und FA × AG = q, beschreibe um AG als Durchmesser einen Kreis: so wird dieser Kreis der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A zwey beliebige Linien AB, AC, unter dem gegebenen Winkel, die eine an DE, die andere nach der Peripherie des Kreises, und überdies die Linie CG. Alsdann ist aus der Constr. BAC = FAG, und demnach auch BAF = CAG. Da nun auch ACG als Winkel im Halbkreise ein Rechter: so ist ACG = AFB, und demnach △ AGC ∽ △ ABF. Man hat also AB : AG = AF : AC, und daher AB × AC = AG × AF = q, wie erfordert wird.

§ 132.

Aufg. Aus einem gegebenen Punkte werden zwey gerade Linien unter einem gegebenen Winkel gezogen, und zwar von solcher Größe, daß das zwischen denselben enthaltene Rechteck einen gegebenen Flächenraum habe. Der Endpunkt der einen Linie liegt in der Peripherie eines ge-

gebenen Kreises: man soll den Ort für den Endpunkt der anderen Linie finden.

Aufl. Es sey BDH (Fig. 151) ein gegebener Kreis, O dessen Mittelpunkt; AB, AC, seyen zwey beliebige aus A gezogene Linien, welche einen gegebenen Winkel BAC = α einschließen, und welche von solcher Größe sind, daß das zwischen denselben enthaltene Rechteck einen gegebenen Flächeninhalt = q hat.

Man ziehe AO, welche den gegebenen Kreis in D und G schneidet, mache DAE = α, und bestimme auf AE den Punkt E so, daß AD × AE = q sey. Es sey nun I ein Punkt, der dadurch bestimmt wird, daß man eine beliebige Linie AH an den Kreis BDG ziehet, den Winkel HAI = α, und das Verhältniß AH : AI, dem gegebenen Verhältnisse AG : AE gleich macht. Der Ort dieses Punktes ist demnach ein Kreis, der nach § 128 gefunden wird. Dieser Kreis wird nun auch der Ort des Punktes C seyn.

Denn, vermöge der Constr. ist für jede zwey, aus A nach den beyden Kreisen gezogene Linien, welche einen Winkel = α einschließen, wie etwa AF und AC, AF : AC = AG : AE; folglich auch AF × AB : AC × AB = AG × AD : AE × AD. Nun ist AF × AB = AG × AD; folglich ist auch AC × AB = AE × AD = q, wie erfordert wird.

§ 133.

Aufg. Aus zwey gegebenen Punkten werden zwey Parallellinien gezogen, welche ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben. Der Endpunkt der einen berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie: man soll den Ort für den Endpunkt der anderen finden.

Aufl. A, B, (Fig. 152) sind zwey gegebene Punkte, und AC, BD, zwey Parallellinien; der Punkt C liegt in der

gegebenen Linie GH: man soll den Ort des Punktes D bestimmen, wenn für jedes Paar solcher Linien das Verhältniß AC : BD dem gegebenen Verhältnisse m : n gleich seyn soll.

Man ziehe aus A an GH die beliebige Linie AE, und aus B die BF der AE parallel, mache AE : BF = m : n, und ziehe, durch den auf diese Art bestimmten Punkt F, die Linie IK der GH parallel: so wird diese Linie der gesuchte Ort seyn. Denn man ziehe aus A und B, an die Linien GH, IK, zwey beliebige Parallelen AC, BD: so sind, da AE ⧣ BF, AC ⧣ BD, CE ⧣ DF, die drey Winkel des Dreyecks ACE den dreyen Winkeln des Dreyecks BDF gleich, und demnach AC : BD = BE : AF = m : n, wie erfordert wird.

§ 134.

Aufg. Aus zwey gegebenen Punkten sind zwey Parallellinien von einem gegebenen Verhältnisse gezogen; der Endpunkt der einen liegt in der Peripherie eines gegebenen Kreises: man soll den Ort für den Endpunkt der anderen finden.

Aufl. A, B, (Fig. 153), sind zwey gegebene Punkte, AC, BD, zwey Parallelen, welche das gegebene Verhältniß m : n zu einander haben; der Punkt C liegt in der Peripherie des Kreises, dessen Mittelpunkt E ist: man soll den Ort des Punktes D finden.

Man ziehe die Linie AE und BF ihr parallel, und bestimme den Punkt F so, daß AE : BF = m : n sey; mache hierauf EG : FH = m : n, und bestimme dadurch den Punkt H. Beschreibt man nun aus F mit FH einen Kreis: so ist dieser Kreis der verlangte Ort. Denn man ziehe zwey willkührliche Parallelen AC, BD, nach den Peripherien der Kreise, und die Halbmesser EC, FD; alsdann ist der Winkel EAC = FBD; ferner ist AE : BF = m : n, und EC : FD = EG : FH

$=$ m : n, demnach AE : BF $=$ EC : FD. Ueberdies sind, wie leicht einzusehen ist, die Winkel AEC, BFD, zugleich spitz, recht, oder stumpf. Es ist also △ AEC ∽ △ BFD, und daher AC : BD $=$ AE : BF $=$ m : n, wie erfordert wird.

§ 135.

Aufg. Aus zwey gegebenen Punkten sind zwey gerade Linien gezogen, welche einen gegebenen Winkel einschließen; auf jede dieser Linien ist von dem gegebenen Punkte an ein Stück abgeschnitten, und zwar von solcher Größe, daß diese Stücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben. Der Endpunkt des einen Stückes berührt eine der Lage nach gegebene gerade Linie: man soll den Ort für den Endpunkt deß anderen finden.

Aufl. A, B, (Fig. 154), sind zwey gegebene Punkte, und AE, BE, zwey beliebige Linien, welche einen gegebenen Winkel AEB $= \alpha$ einschließen. Auf diesen Linien sind zwey Stücke AC, BD, von solcher Größe abgeschnitten, daß AC : BD $=$ m : n sey. Der Punkt C liegt in der Linie FG: man soll den Ort des Punktes D bestimmen.

Man ziehe aus A an FG eine beliebige Linie AN, mache NAP $= \alpha$, und AN : AP $=$ m : n, und bestimme hierauf nach § 127 den Ort des Punktes P. Es sey die gerade Linie HI dieser Ort. Man mache nun die Linie BQ der AP gleich und parallel; ferner ziehe man durch den Punkt Q, die Linie KL der HI parallel: so ist diese Linie der gesuchte Ort. Es werden nämlich, wenn man zwey beliebige Linien AE, BE, ziehet, welche den gegebenen Winkel α einschließen, die durch die Linien FG, KL, abgeschnittenen Stücke AC, BD, das gegebene Verhältniß m : n haben.

Denn man mache den Winkel CAR $= \alpha$, und AC : AR $=$ m : n: so liegt, vermöge der Constr. der Punkt R in der

Linie HI. Da nun AP # BQ, PR # QD, und wegen der gleichen Winkel AEB, CAR, auch BD # AR, ferner AP = BQ, so ist △ APR ≅ △ BQD, und AR = BD. Aber AC : AR = m : n; folglich auch AC : BD = m : n, wie erfordert wird.

Anmerk. Wer über die ebenen Oerter noch Mehreres zu lesen wünscht, dem ist die, schon einmal angeführte, Uebersetzung der ebenen Oerter des Apollonius von Camerer zu empfehlen. Den Alten waren diese Oerter ein vortreffliches Hülfsmittel zur Auflösung der Aufgaben; die Vervollkommnung der Analysis macht sie aber jetzt größtentheils entbehrlich. Sie können indessen noch immer als eine nützliche Vorbereitung zur höhern Geometrie angesehen werden, und aus diesem Grunde durften sie in dieser Sammlung nicht ganz übergangen werden.

XII. Vermischte Aufgaben.

§ 136.

Hülfssatz. Wenn man von den drey Spitzen eines Dreyeckes Perpendikel auf die gegenüber liegenden Seiten ziehet: so schneiden sich diese Perpendikel in einem und demselben Punkte.

Bew. Es sey ABC (Fig. 155 und 156) ein beliebiges Dreyeck; BD, CE seyen zwey Perpendikel auf den Seiten AC, AB, oder auf ihren Verlängerungen, und O der Durchschnittspunkt derselben: so muß bewiesen werden, daß, wenn man AO ziehet, diese, allenfalls verlängerte Linie, die Seite BC in F unter rechten Winkeln schneiden werde. Zu dem Ende ziehe man DE.

Die Dreyecke BOE, COD, sind ähnlich, denn es ist BOE = COD und BEO = CDO = R. Man hat also BO : CO = OE : OD, und da auch der Winkel BOC = EOD: so ist △ BOC ∾ △ EOD und Winkel CBD = DEO. Da ferner AEO, ADO, rechte Winkel sind: so ist ADO + AEO = 2 R; folglich läßt sich um das Viereck ADOE ein Kreis beschreiben, und man hat ∠ DEO = ∠ DAO, (Elem. III. 27) und demnach auch CBD = DAO. Die Dreyecke CAF, CBD, haben demnach die gleichen Winkel CAF, CBD, und den gemeinschaftlichen Winkel ACB; demnach ist auch AFC = BDC = R; W. Z. E. W.

§ 137.

Aufg. In einem Dreyecke sind die aus den Spitzen nach den gegenüber liegenden Seiten gezogenen Perpendikel gegeben: man soll die Seiten, die Winkel, und den Inhalt desselben finden.

Aufl. 1) In dem Dreyecke ABC, (Fig. 155 und 156), sey von den gegebenen Perpendikeln, BD = a, CE = b, AF = c, und von den gesuchten Seiten AB = x, AC = y, BC = z. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ABD, ACE, hat man alsdann BD : AB = CE : AC, oder, a : x = b : y, und daher,

$$y = \frac{bx}{a}.$$

Eben so findet man aus den ähnlichen Dreyecken CBE, ABF,

$$z = \frac{bx}{c}.$$

2) Man hat also,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$$

$$= \frac{x^2}{4ac}\sqrt{(ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(bc+ab-ac)},$$

oder, wenn man der Kürze wegen,

$(ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(bc+ab-ac)=K$

setzt,

$$\triangle ABC = \frac{x^2\sqrt{K}}{4ac}.$$

3) Nun ist aber auch, $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times CE = \frac{1}{2} bx$: man hat also die Gleichung,

$$\frac{x^2\sqrt{K}}{4ac} = \frac{1}{2} bx,$$

woraus man

$$x = \frac{2abc}{\sqrt{K}}$$

erhält.

Hieraus findet man nun auch die beyden übrigen Seiten des Dreyeckes: man hat nämlich

$$y = \frac{bx}{a} = \frac{2b^2c}{\sqrt{K}}$$

$$z = \frac{bx}{c} = \frac{2b^2a}{\sqrt{K}}.$$

4) Für die Winkel des Dreyeckes findet man,

$$\text{Sin. } BAC = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{K}}{2bc}$$

$$\text{Sin. } ABC = \frac{c}{x} = \frac{\sqrt{K}}{2ac}$$

$$\text{Sin. } ACB = \frac{c}{y} = \frac{\sqrt{K}}{2b^2}.$$

5) Ferner ist,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bx = \frac{ab^2c}{\sqrt{K}}.$$

§ 138.

Aufg. Zwey Linien schneiden sich unter einem gegebenen Winkel; dieser Winkel ist durch eine Linie halbirt, und

und auf derselben ein Punkt gegeben: man soll durch diesen Punkt eine Linie von solcher Lage ziehen, daß der zwischen den beyden ersteren sich schneidenden Linien enthaltene Theil eine gegebene Größe habe.

Aufl. Die Linien B'B''', CC'', (Fig. 157), schneiden sich in M unter dem Winkel BMC $= \alpha$: dieser Winkel ist durch die Linie MN halbirt, und MN $=$ a: man soll durch N eine Linie ziehen, so daß das zwischen den ersteren Linien enthaltene Stück BC $=$ b sey.

1) Da BMC $= \alpha$: so ist BMN $=$ CMN $= \frac{1}{2}\alpha$. Wäre nun noch der Winkel BNM bekannt: so wäre die Aufgabe aufgelöst. Es sey daher BNM $= \varphi$; alsdann ist MCN $= \varphi - \frac{1}{2}\alpha$, MBN $= 180^\circ - (\varphi + \frac{1}{2}\alpha)$. Man hat demnach im Dreyecke BMN,

$$BN = \frac{MN \text{ Sin. } BMN}{\text{Sin. } MBN} = \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Sin. } (\varphi + \frac{1}{2}\alpha)},$$

und im Dreyecke CMN,

$$CN = \frac{MN \text{ Sin. } CMN}{\text{Sin. } MCN} = \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Sin. } (\varphi - \frac{1}{2}\alpha)},$$

Da nun BC $=$ BN $+$ CN: so hat man die Gleichung,

$$b = \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Sin. } (\varphi + \frac{1}{2}\alpha)} + \frac{a \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha}{\text{Sin. } (\varphi - \frac{1}{2}\alpha)},$$

oder,

$$b \text{ Sin. } (\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha) \text{ Sin. } (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) = a \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha [\text{Sin. } (\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha) + \text{Sin. } (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha)].$$

2) Man hat aber, $\text{Sin. } (\varphi + \frac{1}{2}\alpha) \text{ Sin. } (\varphi - \frac{1}{2}\alpha) = \text{Sin. } \varphi^2 - \text{Sin. } \frac{1}{2}\alpha^2$, (§. 31), und $\text{Sin. } (\varphi + \frac{1}{2}\alpha) + \text{Sin. } (\varphi - \frac{1}{2}\alpha) = 2 \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \frac{1}{2}\alpha$, (§. 15); die vorige Gleichung verwandelt sich daher in die folgende:

$$b \text{ Sin. } \varphi^2 - b \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = 2 a \text{ Sin. } \tfrac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \tfrac{1}{2}\alpha \text{ Sin. } \varphi,$$

oder da $2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}\alpha \text{ Cos. } \frac{1}{2}\alpha = \text{Sin. } \alpha$, (§. 25), in

$$\text{Sin.}\,\varphi^2 - \frac{a\,\text{Sin.}\,\alpha}{b}\,\text{Sin.}\,\varphi = \text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2;$$

und hieraus erhält man,

$$\text{Sin.}\,\varphi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\alpha \pm \sqrt{(a^2\,\text{Sin.}\,\alpha^2 + 4b^2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2)}}{2b}.$$

Anmerk. Die Aufgabe in § 83 ist nur ein besonderer Fall von dieser weit allgemeineren. Was daselbst von den vier Auflösungen, welche die dortige Aufgabe zuläßt, gesagt worden, gilt auch hier; denn jedem Sinus gehören zwey Winkel zu. Die Figur zeigt die vier verschiedenen Lagen, welche die Linie BC haben kann.

§ 139.

Aufg. An einem gegebenen Kreise sind zwey Tangenten gezogen: man soll eine dritte Tangente von solcher Lage ziehen, daß das zwischen den beyden ersteren enthaltene Stück derselben eine gegebene Größe habe.

Aufl. BDC (Fig. 158) ist ein gegebener Kreis; AB, AC, sind zwey Tangenten desselben, und zwar ist AB = AC = a, und der Winkel BAC = α: man soll eine dritte Tangente EF ziehen, welche die beyden ersteren in E und F so schneidet, daß EF = b sey.

1) Wäre DE bekannt: so wäre die Aufgabe aufgelößt; denn man dürfte alsdann nur BE = DE machen, und aus dem dadurch bestimmten Punkte E eine Tangente an den Kreis ziehen. Man setze daher DE = x; dies giebt DF = b − x, AE = AB + BE = a + x, AF = AC + CF = AC + DF = a + b − x.

2) Im Dreyecke AEF ist,

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2\,AE\,.\,AF\,\text{Cos.}\,EAF$$

und demnach,

$$b^2 = (a+x)^2 + (a+b-x)^2 - 2(a+x)(a+b-x)\,\text{Cos.}\,\alpha$$

oder,

$$x^2 - bx + (a^2 + ab)\frac{1 - \text{Cos.}\,\alpha}{1 + \text{Cos.}\,\alpha} = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun ferner,

$$x = \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{\left[\tfrac{1}{4}b^2 - (a^2 + ab)\frac{1 - \text{Cos.}\,\alpha}{1 + \text{Cos.}\,\alpha}\right]}$$

$$= \tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{[\tfrac{1}{4}b^2 - 2(a^2 + ab)\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2]}, \text{ (§. 46.)}$$

Die beyden hier gefundenen Ausdrücke für x sind immer positiv, wie auch die Figur zeigt. Die Linie EF kann nämlich auch die Lage E′F′ haben, und alsdann hat DE′ den zweyten Werth.

§ 140.

Aufl. Es sind zwey Kreise, und auf der Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, ein Punkt gegeben: man soll durch diesen Punkt eine Linie ziehen, welche den Peripherien der beyden Kreise begegnet, und für welche die zwischen diesen Peripherien und dem gegebenen Punkte liegenden Stücke ein gegebenes Verhältniß haben.

Aufl. M, N, (Fig. 159), seyen die Mittelpunkte der beyden gegebenen Kreise, und P ein Punkt auf der Linie MN; es sey ferner MP = a, NP = b, der Halbmesser MA = r, der Halbmesser NB = R: man soll durch P eine Linie AB nach den Peripherien der beyden Kreise ziehen, so, daß AP : BP = m : n sey.

1) Könnte man die Linie AP bestimmen, so wäre die Aufgabe aufgelöst. Man setze daher AP = x; dies giebt $BP = \frac{nx}{m}$. Demnach ist im Dreyecke AMP,

$$\text{Cos. APM} = \frac{MP^2 + AP^2 - MA^2}{2\,MP \,.\, AP} = \frac{a^2 + x^2 - r^2}{2ax}$$

und im Dreyecke BNP,

$$\text{Cos. BPN} = \frac{NP^2 + BP^2 - NB^2}{2NP \cdot BP} = \frac{b^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} - R^2}{\frac{2bnx}{m}}$$

$$= \frac{m^2b^2 + n^2x^2 - m^2R^2}{2mnbx}.$$

2) Da nun Cos. APM = Cos. BPN: so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{a^2 + x^2 - r^2}{2ax} = \frac{m^2b^2 + n^2x^2 - m^2R^2}{2mnbx},$$

und hieraus,

$$x = \sqrt{\frac{am^2(b^2 - R^2) - bmn(a^2 - r^2)}{bmn - an^2}}.$$

§ 141.

Aufg. Aus zwey bestimmten Punkten auf der Peripherie eines gegebenen Kreises zwey Sehnen zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel einschließen, und ein gegebenes Verhältniß haben.

Aufl. Es sey ABDC (Fig. 160) ein gegebener Kreis, der Halbmesser desselben = r; A, B, seyen zwey Punkte auf der Peripherie des Kreises, aus welchen man zwey Sehnen AD, BC, so ziehen soll, daß AEC = α, und AD : BC = m : n werde. Es sey ferner AB = a.

1) Wüßte man nun die Winkel BAD, DAC: so könnte man die Sehnen AD, AC, ziehen. Man setze daher BAD = φ, DAC = ψ. Hieraus findet man CBD = CAD = ψ, ABC = AEC − BAD = $\alpha - \varphi$, ACB = 180° − (AEC + CAD) = 180° − ($\alpha + \psi$), BAC = BAD + DAC = $\varphi + \psi$, ABD = ABC + CBD = $\alpha - \varphi + \psi$.

2) Die Grundlehren der Trigonometrie geben, AB = 2r Sin. ACB = a, AD = 2r Sin. ABD, BC = 2r Sin. BAC,

und demnach AD : BC = Sin. ABD : Sin. BAC = m : n. Setzt man nun für die Winkel ACB, ABD, BAC, ihre Werthe aus 1: so erhält man die folgenden zwey Gleichungen:

$$2\,r\,\text{Sin.}\,(\alpha + \psi) = a$$
$$m\,\text{Sin.}\,(\varphi + \psi) = n\,\text{Sin.}\,(\alpha - \varphi + \psi).$$

3) Um hieraus die Winkel φ und ψ zu bestimmen, entwickele man Sin. $(\alpha + \psi)$ in der ersten Gleichung; dies giebt,

$$2\,r\,(\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi + \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi) = a$$

oder

$$2\,r\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi = a - 2\,r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi;$$

und wenn man auf beyden Seiten der Gleichung das Quadrat nimmt, und 1 — Cos. φ^2 für Sin. φ^2 setzt,

$$4\,r^2\,\text{Cos.}\,\alpha^2 - 4\,r^2\,\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\psi^2 = a^2 - 4\,a\,r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi + 4\,r^2\,\text{Sin.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\psi^2$$

oder

$$4\,r^2\,\text{Cos.}\,\psi^2 - 4\,a\,r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi = 4\,r^2\,\text{Cos.}\,\alpha^2 - a^2,$$

woraus man erhält,

$$\text{Cos.}\,\psi = \frac{a\,\text{Sin.}\,\alpha}{2\,r} \pm \frac{\text{Cos.}\,\alpha}{2\,r}\sqrt{(4\,r^2 - a^2)};$$

und diese Gleichung dient zur Bestimmung des Winkels ψ.

4) Man multiplicire diese Gleichung mit 2 r Sin. α; dies giebt,

$$2\,r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi = a\,\text{Sin.}\,\alpha^2 \pm \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{(4\,r^2 - a^2)}.$$

Aus 3 ist aber,

$$2\,r\,\text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\psi + 2\,r\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi = a;$$

ziehet man demnach die erste von der zweyten ab: so erhält man,

$$2\,r\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\psi = a\,\text{Cos.}\,\alpha^2 \mp \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\alpha\sqrt{(4\,r^2 - a^2)}$$

und

$$\text{Sin.}\,\psi = \frac{a\,\text{Cos.}\,\alpha}{2r} \mp \frac{\text{Sin.}\,\alpha}{2r}\sqrt{(4r^2 - a^2)}$$

5) Um nun auch den Winkel φ zu bestimmen, entwickele man die zweyte Gleichung in 2; dies giebt,

$$m[\text{Sin.}\,\varphi\,\text{Cos.}\,\psi + \text{Cos.}\,\varphi\,\text{Sin.}\,\psi] = n[\text{Sin.}(\alpha+\psi)\,\text{Cos.}\,\varphi - \text{Cos.}(\alpha+\psi)\,\text{Sin.}\,\psi],$$

und hieraus erhält man,

$$\frac{\text{Sin.}\,\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi} = \text{Tang.}\,\varphi = \frac{n\,\text{Sin.}(\alpha+\psi) - m\,\text{Sin.}\,\psi}{m\,\text{Cos.}\,\psi + n\,\text{Cos.}(\alpha+\psi)}.$$

Nun erhält man aber aus der ersten Gleichung in 2, $\text{Sin.}(\alpha+\psi) = \frac{a}{2r}$; demnach ist $\text{Cos.}(\alpha+\psi) = \frac{\sqrt{(4r^2-a^2)}}{2r}$, und wenn man diese Werthe in dem Ausdrucke für Tang. φ substituirt,

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{na - 2mr\,\text{Sin.}\,\psi}{2mr\,\text{Cos.}\,\psi + n\sqrt{(4r^2-a^2)}}.$$

In diesem Ausdrucke darf man nur noch für Sin. ψ und Cos. ψ ihre in 3 und 4 gefundenen Werthe setzen, so hat man auch den Winkel φ.

Anmerk. Wenn es nicht um allgemeine Ausdrücke für die Winkel φ und ψ, sondern bloß um wirkliche Berechnung eines einzelnen Falles zu thun ist: so kann man am leichtesten auf folgende Art verfahren. Aus der ersten Gleichung in 2 erhält man nämlich $\text{Sin.}(\alpha+\psi) = \frac{a}{2r}$; hieraus läßt sich, wenn man es mit Zahlen zu thun hat, der Winkel $\alpha+\psi$, und somit auch ψ bestimmen. Nachdem auf diese Art ψ bestimmt worden, giebt die Gleichung aus 5,

$$\text{Tang.}\,\varphi = \frac{n\,\text{Sin.}(\alpha+\psi) - m\,\text{Sin.}\,\psi}{m\,\text{Cos.}\,\psi + n\,\text{Cos.}(\alpha+\psi)}$$

unmittelbar auch den Winkel φ.

§ 142.

Aufg. Die Grundlinie eines Dreyecks, der Unterschied der beyden Winkel an derselben, wie auch die Linien, welche von dem Scheitelpunkte des Dreyecks nach der Mitte der Grundlinie gezogen werden kann, ist gegeben: man soll das Dreyeck finden.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 161) das gesuchte Dreyeck, die Grundlinie BC $= a$, D die Mitte von BC, und AD $= b$, ferner ACB — ABC $= \alpha$.

1) Wüßte man den Winkel ADC: so wären in jedem der beyden Dreyecke CAD, DAB, zwey Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel bekannt, folglich diese Dreyecke selbst, und somit auch das ganze Dreyeck BAC. Man setze daher ADC $= \varphi$, und ziehe das Perpendikel AE. Alsdann ist AE $= b \text{ Sin. } \varphi$, DE $= b \text{ Cos. } \varphi$, BE $= \frac{1}{2}a + b \text{ Cos. } \varphi$, CE $= \frac{1}{2}a - b \text{ Cos. } \varphi$; folglich

$$\text{Tang. ABC} = \frac{AE}{BE} = \frac{b \text{ Sin. } \varphi}{\frac{1}{2}a + b \text{ Cos. } \varphi}$$

$$\text{Tang. ACB} = \frac{AE}{CE} = \frac{b \text{ Sin. } \varphi}{\frac{1}{2}a - b \text{ Cos. } \varphi}.$$

2) Nach §. 19 ist

$$\text{Tang.}(\text{ACB}-\text{ABC}) = \text{Tang. } \alpha = \frac{\text{Tang. ACB} - \text{Tang. ABC}}{1 + \text{Tang. ACB Tang. ABC}}.$$

Setzt man hierin für Tang. ACB, Tang. ABC, ihre in 1 gefundenen Werthe: so erhält man die Gleichung,

$$\text{Tang. } \alpha = \frac{2b^2 \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \varphi}{\frac{1}{4}a^2 - b^2(\text{Cos. } \varphi^2 - \text{Sin. } \varphi^2)},$$

oder, da (§. 25 und 26) $2 \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \varphi = \text{Sin. } 2\varphi$, $\text{Cos. } \varphi^2 - \text{Sin. } \varphi^2 = \text{Cos. } 2\varphi$

$$\text{Tang.}\,\alpha = \frac{b^2\,\text{Sin.}\,2\,\varphi}{\frac{1}{4}\,a^2 - b^2\,\text{Cos.}\,2\,\varphi}.$$

3) Man setze in die zuletzt gefundene Gleichung $\frac{\text{Sin.}\,\alpha}{\text{Cos.}\,\alpha}$ für Tang. α; hierdurch verwandelt sie sich in die folgende:

$$b^2(\text{Sin.}\,2\,\varphi\,\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,2\,\varphi\,\text{Sin.}\,\alpha) = \tfrac{1}{4}\,a^2\,\text{Sin.}\,\alpha,$$

oder,

$$b^2\,\text{Sin.}\,(2\,\varphi + \alpha) = \tfrac{1}{4}\,a^2\,\text{Sin.}\,\alpha;$$

und diese Gleichung giebt,

$$\text{Sin.}\,(2\,\varphi + \alpha) = \frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha}{4\,b^2}.$$

Hieraus läßt sich nun $2\,\varphi + \alpha$, und somit auch φ bestimmen,

Zus. Aus dieser analytischen Auflösung ergiebt sich die folgende ziemlich einfache Construktion.

Aus einem beliebigen Punkte C, (Fig. 162), beschreibe man mit CA = b den Halbkreis ANB, und mit CD = $\frac{1}{2}$ a den Kreis LFM; mache ACE = α, und ziehe aus dem Punkte F, wo die Linie CE den Kreis schneidet, die FG der AB parallel, welche den Halbkreis in G trifft. Man ziehe nun CG, und durch den Punkt H, wo der Kreis von dieser Linie geschnitten wird, die IK der AB parallel bis zum Halbkreise; ziehe hierauf KC, diese schneidet den Kreis in L und M; halbire den Winkel ECK durch CN, und ziehe aus dem Punkte N, wo solche den Halbkreis trifft, die Linien NL, NM: so ist LNM das verlangte Dreyeck.

Denn man ziehe die Perpendikel Ff, Gg, Hh, Ii, Kk; alsdann ist Gg = Ff = $\frac{1}{2}$ a Sin. α. Ferner ist CG : CH = Gg : Hh, oder b : $\frac{1}{2}$ a = $\frac{1}{2}$ a Sin. α : Hh, und daher Hh = $\frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha}{4\,b}$ = Kk, und Sin. BCK = $\frac{\text{Kk}}{\text{CK}} = \frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha}{4\,b^2}$ =

Sin. ACK. Nun ist aber auch nach der analytischen Auflösung $\text{Sin.}\,(2\varphi + \alpha) = \frac{a^2\,\text{Sin.}\,\alpha}{4b^2}$; demnach ist $2\varphi + \alpha =$ ACK, und $\varphi = \frac{1}{2}$ ECK $=$ NCM. Das Uebrige ist von selbst klar.

Außer dem Winkel ACK, ist auch der Winkel ACI $=$ $2\varphi + \alpha$, mithin der Winkel ICE $= - 2\varphi$. Da aber hier kein negativer Winkel für φ gesucht wird: so ist in diesem Falle nur KCN $= \varphi$.

§ 143.

Aufg. In ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben.

Aufl. Es sey ABCD (Fig. 163) das gegebene Viereck, MNPQ das gesuchte Quadrat.

1) Da das Viereck gegeben ist: so sind auch die vier Winkel desselben, A, B, C, D, und die Seiten AB, BC, bekannt. Es sey daher AB $=$ a, BC $=$ b. Wüßte man nun die Seite des Quadrates, und nur einen der Winkel, welche die Seiten desselben mit den Seiten des Vierecks machen: so wäre alles Uebrige bestimmt, und man könnte das Quadrat beschreiben. Man setze daher MN $=$ x, BMN $= \varphi$.

2) Aus φ und den gegebenen Winkeln lassen sich nun alle übrige Winkel der Figur finden. Denn da QMN $=$ R: so ist AMQ $= 90° - \varphi$, und daher AQM $= 180° - \text{A} - \text{AMQ}$ $= 90° - (\text{A} - \varphi)$. Ferner ist BNM $= 180° - (\text{B} + \varphi)$, und daher wegen des rechten Winkels MNP, CNP $= \text{B} + \varphi$ $- 90°$, und CPN $= 180° - \text{C} - \text{CNP} = 270° - (\text{B} + \text{C} + \varphi)$. Die anderen Winkel werden hier nicht gebraucht.

3) Das Dreyeck BMN giebt nun,

$$\text{BM} = \frac{\text{MN Sin. BNM}}{\text{Sin. MBN}} = \frac{\text{x Sin.}\,(\text{B} + \varphi)}{\text{Sin. B}},$$

$$BN = \frac{MN \text{ Sin. } BMN}{\text{Sin. } MBN} = \frac{x \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } B}.$$

Das Dreyeck MAQ giebt,

$$AM = \frac{MQ \text{ Sin. } AQM}{\text{Sin. } MAQ} = \frac{x \text{ Cos. } (A - \varphi)}{\text{Sin. } A},$$

und das Dreyeck NCP,

$$CN = \frac{NP \text{ Sin. } CPN}{\text{Sin. } NCP} = - \frac{x \text{ Cos. } (B + C + \varphi)}{\text{Sin. } C}.$$

4) Da nun $AM + BM = AB = a$, $BN + CN = BC = b$: so hat man die beyden Gleichungen,

$$\frac{x \text{ Cos. } (A - \varphi)}{\text{Sin. } A} + \frac{x \text{ Sin. } (B + \varphi)}{\text{Sin. } B} = a,$$

$$\frac{x \text{ Sin. } \varphi}{\text{Sin. } B} - \frac{x \text{ Cos. } (B + C + \varphi)}{\text{Sin. } C} = b,$$

und hieraus erhält man durch die Elimination des x,

$$a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Sin. } \varphi - a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Cos. } (B + C + \varphi)$$
$$= b \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } (A - \varphi) + b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Sin. } (B + \varphi).$$

5) Man entwickele nun $\text{Cos. } (B + C + \varphi)$, $\text{Cos. } (A - \varphi)$, $\text{Sin. } (B + \varphi)$, (§. 9 und 10), um φ von den übrigen Größen abzusondern; dies giebt,

$$\text{Sin. } \varphi \begin{bmatrix} a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C + a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } (B + C) \\ - b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C - b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Cos. } B \end{bmatrix}$$

$$= \text{Cos. } \varphi \begin{bmatrix} b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C + b \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } A \\ + a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Cos. } (B + C) \end{bmatrix},$$

und hieraus erhält man,

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{\begin{bmatrix} b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C + b \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C \text{ Cos. } A \\ + a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Cos. } (B + C) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C + a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } (B + C) \\ - b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B \text{ Sin. } C - b \text{ Sin. } A \text{ Sin. } C \text{ Cos. } B \end{bmatrix}}$$

oder, wenn man den Zähler und Nenner durch Sin. A dividirt,

$$\text{Tang.}\ \varphi = \frac{\text{Sin. B}\,[\text{b Sin. C} + \text{b Sin. C Cot. A} + \text{a Cos.}(\text{B}+\text{C})]}{\text{a Sin.C} + \text{a Sin.B Sin.}(\text{B}+\text{C}) - \text{b Sin.B Sin.C} - \text{b Sin C Cos.B}}.$$

§ 144.

Aufg. In ein gegebenes Dreyeck ein anderes gegebenes Dreyeck zu beschreiben.

Aufl. Es sey ABC (Fig. 164) das gegebene Dreyeck, worin das ebenfalls gegebene Dreyeck MNP so eingetragen werden soll, daß die Spitzen desselben die Seiten des ersteren berühren.

1) Da die beyden Dreyecke gegeben sind: so kennt man auch ihre Winkel und Seiten. Es sey demnach BAC = A, ABC = B, ACB = C, NMP = m, MNP = n, AB = a, MN = f, MP = g. Wüßte man den Winkel AMN: so wäre die Aufgabe aufgelöst. Es sey daher AMN = φ. Aus diesem und den gegebenen Winkel lassen sich nun ferner alle übrige bestimmen. Man hat nämlich ANM = $180° - (A + \varphi)$, BMP = $180° -$ (NMP + AMN) = $180° - (m + \varphi)$, BPM = $180° -$ BMP $-$ MBP = $m - B + \varphi$.

2) Hieraus ergiebt sich ferner,

$$\text{AM} = \frac{\text{MN Sin. ANM}}{\text{Sin. MAN}} = \frac{\text{f Sin.}(\text{A}+\varphi)}{\text{Sin. A}},$$

$$\text{BM} = \frac{\text{MP Sin. BPM}}{\text{Sin. MBP}} = \frac{\text{g Sin.}(\text{m}-\text{B}+\varphi)}{\text{Sin. B}}.$$

3) Da nun AB = AM + BM: so hat man die Gleichung,

$$\frac{\text{f Sin.}(\text{A}+\varphi)}{\text{Sin. A}} + \frac{\text{g Sin.}(\text{m}-\text{B}+\varphi)}{\text{Sin. B}} = \text{a},$$

oder, wenn man Sin. $(A + \varphi)$, Sin. $(m - B + \varphi)$ entwickelt, und alles gehörig ordnet,

$$[f \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B + g \text{ Sin. } A \text{ Sin. } (m - B)] \text{ Cos. } \varphi + [f \text{ Sin. } B \text{ Cos. } A + g \text{ Sin. } A \text{ Cos. } (m - B)] \text{ Sin. } \varphi = a \text{ Sin. } A \text{ Sin. } B,$$

und wenn man diese Gleichung durch Sin. A dividirt,

$$[f \text{ Sin. } B + g \text{ Sin. } (m - B)] \text{ Cos. } \varphi + [f \text{ Sin. } B \text{ Cot. } A + g \text{ Cos. } (m - B)] \text{ Sin. } \varphi = a \text{ Sin. } B.$$

4) Man dividire diese Gleichung durch f Sin. B Cot. A + g Cos. $(m - B)$, und setze

$$\frac{f \text{ Sin. } B + g \text{ Sin. } (m - B)}{f \text{ Sin. } B \text{ Cot. } A + g \text{ Cos. } (m - B)} = \text{Tang. } \mu;$$

d. h. man suche einen Winkel μ von solcher Größe, daß die Tangente desselben dem Ausdrucke zur Linken gleich werde, (ein Verfahren, welches schon sehr oft zur Abkürzung der Rechnung gebraucht wurde): alsdann erhält man,

$$\text{Tang. } \mu \text{ Cos. } \varphi + \text{Sin. } \varphi = a \text{ Sin. } B$$

oder

$$\text{Sin. } \mu \text{ Cos. } \varphi + \text{Cos. } \mu \text{ Sin. } \varphi = a \text{ Sin. } B \text{ Cos. } \mu$$

oder endlich

$$\text{Sin. } (\varphi + \mu) = a \text{ Sin. } B \text{ Cos. } \mu.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun sehr leicht $\varphi + \mu$, und folglich auch φ bestimmen.

§ 145.

Aufg. Es sind zwey Punkte und eine gerade Linie gegeben: man soll auf dieser Linie zwey Punkte von solcher Beschaffenheit finden, daß, wenn man aus diesen

nach jenen ersteren Linien ziehet, die Winkel, welche diese Linien an den gegebenen Punkten einschließen, eine gegebene Größe haben.

Aufl. A, B, (Fig. 165), seyen die gegebenen Punkte, MN eine Linie von gegebener Lage: es sollen darauf zwey Punkte C, D, gefunden werden, so daß, wenn die Linien AC, AD, BC, BD, gezogen werden, der Winkel CAD $= \alpha$, und CBD $= \beta$ sey.

1) Man ziehe aus A und B nach MN die Linien AE, BF, unter den Winkeln AED $=$ CAD $= \alpha$, BFD $=$ CBD $= \beta$. Man kann alsdann die Linien FE, AE, BF als bekannt ansehen, und es sey demnach FE $= a$, AE $= b$, BF $= c$. Um die Punkte C, D zu bestimmen, setze man DE $= x$.

2) Es ist nun leicht einzusehen, daß $\triangle$ AED $\backsim$ $\triangle$ CAD, und $\triangle$ BFD $\backsim$ $\triangle$ CBD; man hat demnach CD : AD $=$ AD : DE, CD : BD $=$ BD : DF, und folglich,

$$CD = \frac{AD^2}{DE}, \quad CD = \frac{BD^2}{DF},$$

oder, da DE $= x$, DF $= a + x$, $AD^2 = b^2 + x^2 - 2bx \,\mathrm{Cos.}\,\alpha$, $BD^2 = c^2 + (a+x)^2 - 2c(a+x)\,\mathrm{Cos.}\,\beta$: so ist,

$$CD = \frac{b^2 + x^2 - 2\,bx\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}{x}$$

$$CD = \frac{c^2 + (a+x)^2 - 2\,c\,(a+x)\,\mathrm{Cos.}\,\beta}{a+x}.$$

3) Setzt man diese beyden Ausdrücke für CD einander gleich: so erhält man nach gehöriger Reduktion die folgende Gleichung:

$$(a + 2b\,\mathrm{Cos.}\,\alpha - 2c\,\mathrm{Cos.}\,\beta)\,x^2 + (a^2 + c^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{Cos.}\,\alpha - 2ac\,\mathrm{Cos.}\,\beta)\,x = ab^2$$

woraus sich x bestimmen läßt.

§ 146.

Aufg. Es wird die Lage und Größe zweyer Kreise und die Lage einer geraden Linie gegeben: man soll einen Kreis beschreiben, welcher jene beyden Kreise und die gerade Linie berührt.

Aufl. Es seyen B und C (Fig. 166) die Mittelpunkte der beyden gegebenen Kreise, F der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher jene beyden Kreise in D, E, und zugleich die der Lage nach gegebene gerade Linie MN in G berührt.

1) Man ziehe durch die Mittelpunkte B, C, eine Linie BC, welche der MN in A begegnet, ferner die Linien FB, FC, FG, von welchen die beyden ersteren nothwendig durch die Berührungspunkte D, E, gehen, (El. III. 12), und die letztere auf MN perpendikulär stehet. Da die Kreise, deren Mittelpunkte B, C, sind, und die Linie MN, eine gegebene Lage haben: so ist auch der Winkel MAC und die Linie AB und BC gegeben. Man setze demnach MAC $= \alpha$, AB $= a$, BC $= b$. Es sey ferner der Halbmesser BD $= r$, und der Halbmesser CE $= R$. Man ziehe nun noch die Linien BF, CF, und verlängere die erstere, bis sie der MN in H begegnet. Könnte man nun den Winkel CBH, und den Halbmesser FD, folglich auch BF bestimmen: so hätte man den Mittelpunkt und den Halbmesser des gesuchten Kreises, und somit wäre die Aufgabe aufgelöst. Es sey daher CBH $= \varphi$, FD $= x$.

2) Aus diesen Annahmen erhält man FB $= r + x$, FC $= R + x$, AHB $= \varphi - \alpha$. Man hat demnach,

$$BH = \frac{AB \text{ Sin. } BAH}{\text{Sin. } AHB} = \frac{a \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\varphi - \alpha)},$$

folglich,

$$FH = BH - BF = \frac{a \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\varphi - \alpha)} - (r + x).$$

Nun ist aber auch,

$$FH = \frac{GF}{\text{Sin. } AHB} = \frac{x}{\text{Sin. } (\varphi - \alpha)};$$

man hat also die Gleichung,

$$\frac{x}{\text{Sin. } (\varphi - \alpha)} = \frac{a \text{ Sin. } \alpha}{\text{Sin. } (\varphi - \alpha)} - (r + x),$$

woraus man

$$x = \frac{a \text{ Sin. } \alpha - r \text{ Sin. } (\varphi - \alpha)}{1 + \text{Sin. } (\varphi - \alpha)}$$

erhält.

3) In dem Dreyecke BFC ist ferner,

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 - 2 \, BC \, . \, BF \text{ Cos. } CBF$$

oder,

$$(x + R)^2 = (x + r)^2 + b^2 - 2 \, b \, (x + r) \text{ Cos. } \varphi.$$

Hieraus erhält man,

$$x = \frac{r^2 + b^2 - R^2 - 2 \, br \text{ Cos. } \varphi}{2 \, (R - r + b \text{ Cos. } \varphi)}.$$

4) Setzt man die beyden in 2 und 3 für x gefundenen Ausdrücke einander gleich: so erhält man nach gehöriger Reduktion die Gleichung

$$2 \, b \, (r + a \text{ Sin. } \alpha) \text{ Cos. } \varphi + (R^2 - 2 \, Rr + r^2 - b^2) \text{ Sin. } (\varphi - \alpha)$$
$$= r^2 + b^2 - R^2 - 2 \, a \, (R - r) \text{ Sin. } \alpha.$$

Nun ist $\text{Sin. } (\varphi - \alpha) = \text{Sin. } \varphi \text{ Cos. } \alpha - \text{Cos. } \varphi \text{ Sin. } \alpha,$

$R^2 - 2Rr + r^2 - b^2 = (R-r)^2 - b^2 = (R-r+b)(R-r-b)$. Werden diese Werthe in die gefundene Gleichung gesetzt, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$[2b(r+a\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)-(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Sin.}\,\alpha]\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + (R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha\,\mathrm{Sin.}\,\varphi = r^2+b^2-R^2-2a(R-r)\,\mathrm{Sin.}\,\alpha.$$

5) Man dividire diese Gleichung durch $(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha$, und setze,

$$\frac{2b(r+a\,\mathrm{Sin.}\,\alpha)-(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}{(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha} = \mathrm{Tang.}\,\mu;$$

dies giebt,

$$\mathrm{Tang.}\,\mu\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + \mathrm{Sin.}\,\varphi = \frac{r^2+b^2-R^2-2a(R-r)\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}{(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}$$

und, wenn man auf beyden Seiten dieser Gleichung mit $\mathrm{Cos.}\,\mu$ multiplicirt, und $\mathrm{Sin.}\,(\varphi+\mu)$ für $\mathrm{Sin.}\,\mu\,\mathrm{Cos.}\,\varphi + \mathrm{Cos.}\,\mu\,\mathrm{Sin.}\,\varphi$ setzt,

$$\mathrm{Sin.}\,(\varphi+\mu) = \frac{[r^2+b^2-R^2-2a(R-r)\,\mathrm{Sin.}\,\alpha]\,\mathrm{Cos.}\,\mu}{(R-r+b)(R-r-b)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha}.$$

Hieraus läßt sich nun $\varphi+\mu$ und folglich auch φ bestimmen.

§ 147.

Aufg. Es wird die Lage und Größe dreyer Kreise gegeben: man soll einen Kreis beschreiben, welcher diese Kreise berührt.

Aufl. Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sollen A, B, C, (Fig. 167), und G soll der Mittelpunkt des Kreises seyn, welcher die gegebenen in D, E, F, berührt. Von den Halbmessern der gegebenen Kreise sey $AD = R$, $BE = r$, $CF = \varrho$; der Halbmesser des gesuchten $GD = GE = GF = x$.

$= x$. Da die drey Kreise ihrer Lage nach gegeben sind: so werden auch die geraden Linien, welche ihre Mittelpunkte verbinden, und die Winkel, welche diese Linien einschließen, gegeben. Es sey also $AB = a$, $BC = b$, und der Winkel $ABC = B$.

1) Man ziehe nach dem Mittelpunkte G des gesuchten Kreises die Linien AG, BG, CG, so gehen diese durch die Berührungspunkte. Setzt man nun noch den unbekannten Winkel $ABG = \varphi$: so hat man aus den Dreyecken AGB, BGC, die folgenden zwey Gleichungen:

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 - 2\,AB \,.\, BG \text{ Cos. } \varphi$$
$$CG^2 = BC^2 + BG^2 - 2\,BC \,.\, BG \text{ Cos. } (B - \varphi);$$

oder, da $AG = R + x$, $BG = r + x$, $CG = \varrho + x$,

$$(R + x)^2 = a^2 + (r + x)^2 - 2a(r + x) \text{ Cos. } \varphi$$
$$(\varrho + x)^2 = b^2 + (r + x)^2 - 2b(r + x) \text{ Cos. } (B - \varphi).$$

Aus der ersten von diesen Gleichungen findet man,

$$x = \frac{a^2 + r^2 - R^2 - 2ar \text{ Cos. } \varphi}{2(R - r + a \text{ Cos. } \varphi)},$$

und aus der zweyten,

$$x = \frac{b^2 + r^2 - \varrho^2 - 2br \text{ Cos. } (B - \varphi)}{2(\varrho - r + b \text{ Cos. } (B - \varphi))}.$$

2) Setzt man die beyden für x gefundenen Ausdrücke einander gleich: so erhält man nach gehöriger Reduktion die folgende Gleichung:

$$a(r^2 - 2ar\varrho + \varrho^2 - b^2) \text{ Cos. } \varphi - b(R^2 - 2bRr + r^2 - a^2)$$
$$\text{Cos. } (B - \varphi) = (b^2 + r^2 - \varrho^2)(R - r) + (a^2 + r^2 - R^2)(R - \varrho);$$

oder, da $r^2 - 2ar\varrho + \varrho^2 - b^2 = (r - \varrho)^2 - b^2 = (r - \varrho + b)(r - \varrho - b)$, und $R^2 - 2bRr + r^2 - a^2 = (R - r)^2 - a^2 = (R - r + a)(R - r - a)$,

$$a(r-\varrho+b)(r-\varrho-b)\,\text{Cos.}\,\varphi - b(R-r+a)(R-r-a)\,\text{Cos.}(B-\varphi) = (b^2+r^2-\varrho^2)(R-r) + (a^2+r^2-R^2)(R-\varrho).$$

Man entwickele nun Cos. $(B-\varphi)$, und dividire die ganze Gleichung durch $b(R-r+a)(R-r-a)$; dies giebt, wenn Cot. B für $\frac{\text{Cos. B}}{\text{Sin. B}}$ gesetzt wird,

$$\left[\frac{a(r-\varrho+b)(r-\varrho-b)}{b(R-r+a)(R-r-a)} - \text{Cot.B}\right]\text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\varphi$$
$$= \frac{(b^2+r^2-\varrho^2)(R-r) + (a^2+r^2-R^2)(R-\varrho)}{b(R-r+a)(R-r-a)}.$$

3) Man setze nun,

$$\frac{a(r-\varrho+b)(r-\varrho-b)}{b(R-r+a)(R-r-a)} - \text{Cot.B} = \text{Tang.}\,\mu$$

alsdann ist μ ein bekannter Winkel, und man hat,

$$\text{Tang.}\,\mu\ \text{Cos.}\,\varphi - \text{Sin.}\,\varphi =$$
$$\frac{(b^2+r^2-\varrho^2)(R-r) + (a^2+r^2-R^2)(R-r)}{b(R-r+a)(R-r-a)},$$

oder, wenn man die ganze Gleichung mit Cos. φ multipliciret, und Sin. $(\mu - \varphi)$ für Sin. μ Cos. φ — Cos. μ Sin. φ setzt,

$$\text{Sin.}(\mu-\varphi) = \frac{(b^2+r^2-\varrho^2)(R-r) + (a^2+r^2-R^2)(R-r)}{b(R-r+a)(R-r-a)}.$$

Hieraus läßt sich nun $\mu - \varphi$, und folglich auch φ bestimmen.

§ 148.

Aufg. Die vier Seiten eines Vierecks und die beyden Diagonalen desselben sind gegeben: man soll die Segmente dieser Diagonalen finden.

Aufl. In dem Vierecke ABCD (Fig. 168) sind die vier Seiten AB, BC, CD, AD, und die beyden Diagonalen AC, BD, gegeben; man soll die Segmente AE, CE, BE, DE, finden. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = f$, $BD = g$, $AE = x$, $BE = y$, und demnach $CE = f - x$, $DE = g - y$.

1) Aus den vier Dreyecken BAD, BCD, ABC, ADC, erhält man,

$$\text{Cos. } ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2\, AB \,.\, BD} = \frac{a^2 + g^2 - d^2}{2\, ag}$$

$$\text{Cos. } CBD = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2\, BC \,.\, BD} = \frac{b^2 + g^2 - c^2}{2\, bg}$$

$$\text{Cos. } ACB = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2\, BC \,.\, AC} = \frac{b^2 + f^2 - a^2}{2\, bf}$$

$$\text{Cos. } ACD = \frac{CD^2 + AC^2 - AD^2}{2\, CD \,.\, AC} = \frac{c^2 + f^2 - d^2}{2\, cf}.$$

Ferner geben die drey Dreyecke AEB, BEC, CED, die folgenden vier Gleichungen:

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2\, AB \,.\, BE \text{ Cos. } ABD$$
$$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2\, BC \,.\, BE \text{ Cos. } CBD$$
$$BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2\, BC \,.\, CE \text{ Cos. } ACB$$
$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2\, CD \,.\, CE \text{ Cos. } ACD$$

oder, wenn man für die Linien und Cosinusse ihre Werthe setzt, folgende vier:

$$x^2 = a^2 + y^2 - \frac{a^2 + g^2 - d^2}{g} y$$

$$(f - x)^2 = b^2 + y^2 - \frac{b^2 + g^2 - c^2}{g} y$$

$$y^2 = b^2 + (f - x)^2 - \frac{b^2 + f^2 - a^2}{f} (f - x)$$

$$(g - y)^2 = c^2 + (f - x)^2 - \frac{c^2 + f^2 - d^2}{f} (f - x).$$

2) Ziehet man die erste Gleichung von der zweyten, und die dritte von der vierten ab: so erhält man die folgenden zwey Gleichungen:

$$f^2 - 2fx = b^2 - a^2 + \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{g} y$$

$$g^2 - 2gy = c^2 - b^2 - \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{f} (f - x);$$

und hieraus wieder, durch die Elimination des y,

$$x = \frac{f(g^2 + a^2 - d^2)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) - 2fg^2(f^2 + a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 - 4f^2g^2}.$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man auch für die Segmente CE, BE, DE.

§ 149.

Aufg. Aus den drey Spitzen eines gegebenen Dreyecks wird ein Thurm gesehen, dessen Fuß mit dem Dreyecke in Einer Ebene liegt; die Winkel, unter welchen er aus denselben erscheint, sind gegeben: man soll die Entfernung des Thurms von jedem dieser drey Punkte finden.

Aufl. AB (Fig. 160) sey der Thurm, CDE das gegebene Dreyeck; die Winkel, unter welchen der Thurm aus den Punkten C, D, E, gesehen wird, sind ACB, ADB, AEB, und es sey ACB $= \alpha$, ADB $= \beta$, AEB $= \gamma$: man soll die Entfernungen BC, BD, BE, bestimmen.

1) Man ziehe aus B und D auf CE die Perpendikel BF, DG, und aus D die DH der CE parallel, welche der verlängerten BF in H begegnet. Da das Dreyeck CDE gegeben ist: so sind die Linien CE, CG, DG, bekannt. Es sey daher CE $= a$, CG $= b$, DG $=$ FH $= c$. Könnte man nun nur noch die Linien CF, BF, bestimmen: so hätte man auch die gesuchten Entfernungen. Man setze daher CF $= x$, BF $= y$. Dies giebt, BH $= y + c$, DH $=$ GF $= b - x$, EF $= a - x$. Man hat also, $BC^2 = BF^2 + CF^2 = y^2 + x^2$, $BD^2 = BH^2 + DH^2 = y^2 + 2cy + c^2 + b^2 - 2bx + x^2$, $BE^2 = BF^2 + EF^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$.

2) Da AB $=$ BC Tang. $\alpha =$ BD Tang. $\beta =$ BE Tang. γ: so ist auch $BC^2 \text{Tang.}\, \alpha^2 = BD^2 \text{Tang.}\, \beta^2 = BE^2 \text{Tang.}\, \gamma^2$. Man setze nun für BC^2, BD^2, BE^2, ihre in 1) gefundene Werthe; dadurch entstehen die folgenden zwey Gleichungen,

$$\text{Tang.}\, \alpha^2 (y^2 + x^2)$$
$$= \text{Tang.}\, \beta^2 (y^2 + x^2 + 2cy - 2bx + b^2 + c^2)$$

$$\text{Tang.}\, \alpha^2 (y^2 + x^2) = \text{Tang.}\, \gamma^2 (y^2 + x^2 - 2ax + a^2),$$

oder,

$$\frac{\text{Tang.}\, \alpha^2 - \text{Tang.}\, \beta^2}{\text{Tang.}\, \beta^2} (y^2 + x^2) = 2cy - 2bx + b^2 + c^2$$

$$\frac{\text{Tang.}\, \alpha^2 - \text{Tang.}\, \gamma^2}{\text{Tang.}\, \gamma^2} (y^2 + x^2) = - 2ax + a^2.$$

3) Nach §. 34 ist,

$$\text{Tang.}\,\alpha^2 - \text{Tang.}\,\beta^2 = \frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\beta^2}$$

$$\text{Tang.}\,\alpha^2 - \text{Tang.}\,\gamma^2 = \frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)}{\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Cos.}\,\gamma^2};$$

ferner ist,

$$\text{Tang.}\,\beta^2 = \frac{\text{Sin.}\,\beta^2}{\text{Cos.}\,\beta^2}, \quad \text{Tang.}\,\gamma^2 = \frac{\text{Sin.}\,\gamma^2}{\text{Cos.}\,\gamma^2}.$$

4) Die Substitution dieser Werthe in 2) giebt folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Sin.}\,\beta^2}(y^2+x^2) = 2cy - 2bx + b^2 + c^2$$

$$\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)}{\text{Cos.}\,\alpha^2\,\text{Sin.}\,\gamma^2}(y^2+x^2) = -2ax + a^2.$$

5) Man eliminire $y^2 + x^2$, indem man die erste Gleichung mit $\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)}{\text{Sin.}\,\gamma^2}$, und die zweyte mit $\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Sin.}\,\beta^2}$ multiplicirt, und hierauf beyde von einander abziehet; dies giebt die folgende Gleichung:

$$(2cy - 2bx + b^2 + c^2)\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)}{\text{Sin.}\,\gamma^2} -$$

$$(a^2 - 2ax)\frac{\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{\text{Sin.}\,\beta^2} = 0.$$

Hieraus erhält man,

$$y = \left[\frac{b}{c} - \frac{a\,\text{Sin.}\,\gamma^2\,\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{c\,\text{Sin.}\,\beta^2\,\text{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)}\right]x +$$

$$\frac{a^2\,\text{Sin.}\,\gamma^2\,\text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)}{2c\,\text{Sin.}\,\beta^2\,\text{Sin.}\,(\alpha+\gamma)\,\text{Sin.}\,(\alpha-\gamma)} - \frac{b^2+c^2}{2c}.$$

Setzt man diesen Werth in die zweyte Gleichung in 4: so erhält man eine quadratische Gleichung für x, woraus sich x und somit auch y bestimmen läßt.

6) Setzt man zur Abkürzung,

$$\frac{a \text{ Sin. } \gamma^2 \text{ Sin. } (\alpha + \beta) \text{ Sin. } (\alpha - \beta)}{c \text{ Sin. } \beta^2 \text{ Sin. } (\alpha + \gamma) \text{ Sin. } (\alpha - \gamma)} = A$$

$$\frac{\text{Sin. } (\alpha + \gamma) \text{ Sin. } (\alpha - \gamma)}{\text{Cos. } \alpha^2 \text{ Sin. } \gamma^2} = B,$$

so hat man,

$$y = \left[\frac{b}{c} - A\right] x + \tfrac{1}{2} aA - \frac{b^2 + c^2}{2c}$$

$$B(y^2 + x^2) = -2ax + a^2.$$

Die Ausdrücke A, B, lassen sich sehr leicht durch Logarithmen berechnen; die fernere Rechnung wird am Besten mit den gegebenen Zahlen selbst geführt.

§ 150.

Aufg. Ein Kreis ist der Größe und Lage nach gegeben: man soll darin ein Dreyeck beschreiben, dessen Seiten, oder ihre Verlängerungen, durch drey gegebene Punkte gehen.

Aufl. Es sey O (Fig. 170) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, MNP das gesuchte Dreyeck, dessen Seiten durch die drey gegebenen Punkte A, B, C, gehen.

1) Man ziehe die Linien OA, OB, OC: so sind solche, weil die Punkte A, B, C, O, gegeben sind, ebenfalls der Größe und Lage nach gegeben. Es sey demnach OA = a, OB = b, OC = c, AOB = α, AOC = β.

2) Man ziehe die Halbmesser OM, ON, OP; alsdann

sind diese Linien Halbmesser des gegebenen Kreises, und also der Größe nach gegeben, da hingegen ihre Lage unbekannt ist: diese muß daher gefunden werden. Man setze demnach AOM $= \varphi$, AON $= \psi$, AOP $= \xi$; es sey ferner der Halbmesser des Kreises $= r$.

3) In dem gleichschenklichten Dreyecke MON ist der Winkel MON $= \psi - \varphi$; folglich ONM $= \frac{180^\circ - \text{MON}}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(\psi - \varphi)$. Ferner ist im Dreyecke AON der Winkel OAN $= 180^\circ - (\text{ONM} + \text{AON}) = 90^\circ - \frac{1}{2}(\psi + \varphi)$.

4) Das Dreyeck AON giebt die Proportion,

$$\text{AO} : \text{ON} = \text{Sin. ONM} : \text{Sin. OAN}$$

oder

$$a : r = \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) : \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}(\psi + \varphi).$$

Hieraus erhält man die Gleichung,

$$a\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}(\psi + \varphi) = r\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}(\psi - \varphi),$$

oder, da $\text{Cos.}\, \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\psi\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\varphi - \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\psi\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\varphi$, $\text{Cos.}\, \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\psi\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\varphi + \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\psi\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\varphi$, folgende Gleichung,

$$(a - r)\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\psi\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}\varphi = (a + r)\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\psi\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Man dividire durch $(a + r)\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\psi\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2}\varphi$, und setze $\text{Tang.}\, \frac{1}{2}\psi$ für $\frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\psi}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2}\psi}$, $\text{Tang.}\, \frac{1}{2}\varphi$ für $\frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\varphi}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2}\varphi}$; dies giebt,

$$\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\psi\, \text{Tang.}\, \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{a - r}{a + r}.$$

5) Eine ähnliche Gleichung findet man, wenn man die Dreyecke MOP, BOP, eben so behandelt, wie in 3 und 4 die Dreyecke MON, AON. Zu dem Ende darf man nur die

Linie OA mit der Linie OB, die Linie ON mit der Linie OP, und die Winkel AON, AOM, mit den Winkeln BOP, BOM, vertauschen, oder b für a, $\xi - \alpha$ für ψ, und $\varphi - \alpha$ für φ setzen. Man erhält alsdann aus der in 4) gefundenen Gleichung noch die folgende:

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\xi - \alpha)\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \frac{b - r}{b + r}.$$

6) Eben so findet man eine dritte Gleichung, wenn man die Dreyecke MON, AON, mit den Dreyecken NOP, COP, vertauscht, und zu dem Ende OC = c für OA = a, COP = $\xi - \beta$ für AON = ψ, und CON = $\psi - \beta$ für AOM = φ setzt. Man hat also,

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\xi - \beta)\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\psi - \beta) = \frac{c - r}{c + r}.$$

7) Man setze nun zur Abkürzung, Tang. $\tfrac{1}{2}\alpha = m$, Tang. $\tfrac{1}{2}\beta = n$, Tang. $\tfrac{1}{2}\varphi = x$, Tang. $\tfrac{1}{2}\psi = y$, Tang. $\tfrac{1}{2}\xi = z$; ferner $\frac{a - r}{a + r} = A$, $\frac{b - r}{b + r} = B$, $\frac{c - r}{c + r} = C$: alsdann ist nach §. 19, Tang. $\tfrac{1}{2}(\varphi - \alpha) = \frac{x - m}{1 + mx}$, Tang. $\tfrac{1}{2}(\xi - \alpha) = \frac{z - m}{1 + mz}$, Tang. $\tfrac{1}{2}(\psi - \beta) = \frac{y - n}{1 + ny}$, Tang. $\tfrac{1}{2}(\xi - \beta) = \frac{z - n}{1 + nz}$. Die drey Gleichungen in 4, 5, 6, verwandeln sich demnach in die folgenden:

$$xy = A$$

$$\frac{x - m}{1 + mx} \times \frac{z - m}{1 + mz} = B$$

$$\frac{y - n}{1 + ny} \times \frac{z - n}{1 + nz} = C.$$

8) Aus der ersten von diesen Gleichungen erhält man $y = \frac{A}{x}$, und aus der zweyten, $z = \frac{B - m^2 + (1 + B) mx}{(1 - Bm^2) x - (1 + B) m}$.
Setzt man diese Werthe in die dritte Gleichung, so erhält man, C =

$$\frac{A - nx}{nA + x} \left[\frac{B - m^2 + (1 + B) mn + [(1 + B) m - (1 - Bm^2) n] x}{-(1 + B) m + (B - m^2) n + [(1 + B) mn + 1 - Bm^2] x} \right].$$

9) Man setze zur Abkürzung

$$B - m^2 + (1 + B) mn = M$$
$$(1 + B) m - (1 - Bm^2) n = N$$
$$-(1 + B) m + (B - m^2) n = P$$
$$(1 + B) mn + (1 - Bm^2) = Q.$$

Hierdurch erhält man die Gleichung,

$$\frac{A - nx}{nA + x} \times \frac{M + Nx}{P + Qx} = C,$$

oder,

$$(CQ + nN) x^2 + (nACQ + CP + nM - NA) x$$
$$= AM - nAOP;$$

woraus sich x, und somit auch y und z bestimmen läßt. Hieraus lassen sich nun ferner die Winkel φ, ψ, ξ, bestimmen.

Anmerk. Diese, dem Anscheine nach leichte Aufgabe, hat schon seit langer Zeit die größten Geometer beschäftigt. Cramer legte sie zuerst dem Hrn. v. Castillion vor, und dieser gab in den Berliner Memoiren von 1776 eine schöne synthetische Auflösung derselben. In dem nämlichen Bande erschien auch eine andere, analytische Auflösung von Lagrange, der ich mit einigen kleinen Veränderungen in der Bezeichnung gefolgt bin. Von Euler aufgefordert, gab Lexell in dem vierten Bande der Petersbur-

ger Memoiren eine geometrische Construktion der Lagrangischen Formel. Altaiano gab hierauf, in einem Alter von 16 Jahren, in dem vierten Bande der Memorie della societa italiana eine synthetische Auflösung dieses Problems, lehrte auch, wie man überhaupt in einen gegebenen Kreis ein Vieleck beschreiben könne, dessen Seiten durch eine beliebige Anzahl gegebener Punkte gehen. In dem nämlichen Bande befinden sich noch zwey synthetische Auflösungen, die eine von Malfatti, die andere von Giordano. Eine geometrische Construktion der Lagrangischen Formel giebt auch Romano (Nuovo metodo di applicare alla sintesi la soluzione analitica di qualunque problema geometrico. Venezia 1793), welches Werk allen denen zu empfehlen ist, welche sich in der geometrischen Construktion analytischer Formeln üben wollen. Wie Altajano, löste auch Carnot, in seiner Geometrie de position, die allgemeine Aufgabe für das Vieleck auf, und zwar auf folgende sehr sinnreiche Art.

§ 151.

Aufg. Es sind eine gewisse Anzahl Punkte und ein Kreis gegeben: man soll in diesen Kreis ein Vieleck von eben so vielen Seiten als Punkte gegeben sind, beschreiben, und zwar soll jede Seite respektive durch einen dieser Punkte gehen.

Aufl. Es sey K (Fig. 171) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, abcde das gesuchte Vieleck, dessen Seiten durch die gegebenen Punkte A, B, C, D, E, gehen.

1) Da die Punkte A, B, C, D, E, gegeben sind: so sind auch die Linien KA, KB, KC, KD, KE, und die Winkel AKB, BKC, CKD, DKE, EKA, gegeben. Es sey demnach KA $=$ a, KB $=$ b, KC $=$ c, KD $=$ d, KE $=$ e, AKB $= \alpha$, BKC $= \beta$, CKD $= \gamma$, DKE $= \delta$, EKA $= \varepsilon$; es sey ferner der Halbmesser des Kreises $=$ r. Wüßte man nun die Winkel AKa, BKb, CKc, DKd, EKe: so wären die Punkte a, b, c, d, e, bestimmt, und somit wäre die

Aufgabe aufgelöst. Man setze daher AKa $= \tau$, BKb $= v$, CKc $= \varphi$, DKd $= \chi$, EKe $= \psi$.

2) Alsdann hat man im Dreyecke AKb,

$$AK + bK : AK - bK =$$
$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(AbK + bAK) : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(AbK - bAK).$$

Nun ist AbK + bAK $= 180^\circ -$ AKb $= 180^\circ - (\alpha + v)$, AbK $-$ bAK $=$ baK $-$ bAK $=$ AKa $= \tau$; folglich Tang. $\tfrac{1}{2}$ (AbK + bAK) $=$ Tang. $[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + v)] =$ Cot. $\tfrac{1}{2}(\alpha + v) = \dfrac{1}{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha + v)}$, Tang. $\tfrac{1}{2}$ (AbK $-$ bAK) $=$ Tang. $\tfrac{1}{2}\tau$. Man hat also,

$$a + r : a - r = \frac{1}{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha + v)} : \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\tau,$$

oder,

$$\frac{a - r}{a + r} = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\tau\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(\alpha + v),$$

oder,

$$\frac{a - r}{a + r} = \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\tau\ \frac{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha + \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v}{1 - \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v};$$

woraus man erhält,

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\tau = \frac{\dfrac{a - r}{a + r} - \dfrac{a - r}{a + r}\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v}{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha + \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v}.$$

3) Eine ähnliche Gleichung findet man für jede Seite des Vielecks. Man erhält also eben so viele Gleichungen als das Vieleck Seiten hat, und diese Gleichungen sind:

$$\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\tau = \frac{\dfrac{a - r}{a + r} - \dfrac{a - r}{a + r}\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha\ \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v}{\text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\alpha + \text{Tang.}\ \tfrac{1}{2}v}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\upsilon = \frac{\frac{b-r}{b+r} - \frac{b-r}{b+r}\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\beta\;\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi}{\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\beta + \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\frac{c-r}{c+r} - \frac{c-r}{c+r}\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma\;\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\chi}{\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\gamma + \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\chi}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\chi = \frac{\frac{d-r}{d+r} - \frac{d-r}{d+r}\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta\;\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\psi}{\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\delta + \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\psi}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\frac{e-r}{e+r} - \frac{e-r}{e+r}\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon\;\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\tau}{\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\varepsilon + \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\tau}.$$

4) Vermittelst dieser Gleichungen, deren Anzahl jedesmal der Anzahl der unbekannten Größen gleich ist, ist es leicht, diese letzteren zu bestimmen. Wollte man z. B. φ finden: so dürfte man nur in der dritten Gleichung für χ seinen Werth aus der vierten setzen, wodurch man eine Gleichung zwischen φ und ψ erhält. Aus dieser erhält man hierauf wieder eine Gleichung zwischen φ und τ, wenn man für ψ seinen Werthe aus der vierten setzt. Aus dieser ferner eine Gleichung zwischen φ und υ, wenn man für τ seinen Werth in υ aus der ersten Gleichung setzt, und endlich eine Gleichung, welche bloß φ enthält, wenn man für υ seinen Werth in φ aus der zweyten Gleichung setzt. Die Auflösung dieser letzteren Gleichung giebt alsdann den Werth von φ.

5) Man setze zur Abkürzung Tang. $\tfrac{1}{2}\tau = \tau'$, Tang. $\tfrac{1}{2}\upsilon = \upsilon'$, Tang. $\tfrac{1}{2}\varphi = \varphi'$, Tang. $\tfrac{1}{2}\chi = \chi'$, Tang. $\tfrac{1}{2}\psi = \psi'$: hierdurch nehmen die gefundenen Gleichungen die folgende Form an:

$$\tau' = \frac{A + B\upsilon'}{C + D\upsilon'}$$

$$\upsilon' = \frac{A' + B'\varphi'}{C' + B'\varphi'}$$

$$\varphi' = \frac{A'' + B''\chi'}{C'' + D''\chi'}$$

$$\chi' = \frac{A''' + B'''\psi'}{C''' + D'''\psi'}$$

$$\psi' = \frac{A^{IV} + B^{IV}\tau'}{C^{IV} + D^{IV}\tau'}.$$

Setzt man in die erste von diesen Gleichungen für υ' seinen Werth aus der zweyten: so erhält man eine Gleichung zwischen τ' und φ' von der Form $\tau' = \frac{A^{V} + B^{V}\varphi'}{C^{V} + D^{V}\varphi'}$. Setzt man hierin wieder für φ' seinen Werth aus der dritten: so erhält man eine Gleichung zwischen τ' und χ' von der nämlichen Form, und wenn man diese Substitutionen fortsetzt, endlich eine Gleichung von ähnlicher Form, welche bloß τ' enthält, nämlich $\tau' = \frac{M + N\tau'}{P + Q\tau'}$, oder die Gleichung vom zweyten Grade $Q\tau'^2 + (P - N)\,\tau' - M = 0$. Hieraus ergiebt sich das sehr merkwürdige Resultat, daß, wie groß auch immer die Anzahl der gegebenen Punkte seyn mag, die Endgleichung für jede der unbekannten Größen doch nie den zweyten Grad übersteigt.

Bey dem Buchhändler Heinrich Frölich zu Berlin sind nachstehende mathematische Werke verlegt und um beigesetzte Preise bei ihm und durch alle Buchhandlungen zu haben:

Hoffmanns mathematische Elementarschule, oder Anleitung zum kunstlosen Denken über mathematische Gegenstände; mit 7 Kupf. 8. 803. 2 thl.

Ide's, J. J. A., Anfangsgründe der Arithmetik. gr. 8. 803. 18 gr.

— — Anfangsgründe der Geometrie; gr. 8. 803. 18 gr.

— — System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. 2 Thle. gr. 8. mit Kupf. 802. 3 thl.

— — Theorie der Bewegung der Weltkörper unsers Sonnensystems und ihrer elliptischen Figur, nach la Place frei bearbeitet, mit einer Vorrede vom Hofrath Kästner. (Holzschnitte zwischen dem Text.) gr. 8. Engl. Druckpr. 801. 2 thl.

Krause, G. F., Handbuch der mathematischen Forstwissenschaften; mit Tabellen und Kupfern; gr. 8. 800. 2 thl.

La Croix's, S. F., Anfangsgründe der Arithmetik, als Einleitung zur Algebra; a. d. Franz. übers. und mit Zusätzen begleitet von C. M. Hahn, gr. 8. 804. 1 thl.

— — Anfangsgründe der Algebra; a. d. Franz. übers. und mit Anmerk. und Zusätzen begleitet von C. M. Hahn; 1r und 2r Thl. gr. 8. 804. 3 thl.

Sämmtliche mathematische Lehrbücher von La Croix werden in der Uebersetz. in meinem Verlage erscheinen.

Meyer Hirsch, Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra; 8. 804. 1 thl.

BAYER.
STAAT.-BIBL.
MÜNCHEN

1
B
C
A
D
G
4
C
B
D
A
F
G
E
5
C
B
A
F
A
B
D
F
8
D
a
E
C
B
A
F
16
C
A
B
a
b
c
d
E
D
B
C
a
b
A
d
13
E
A
D
15
E
D
C
A
B
b
d
f
h
a
c
e
g
b
c

31
34
37
42
38
43
46
47
55
48
51
52

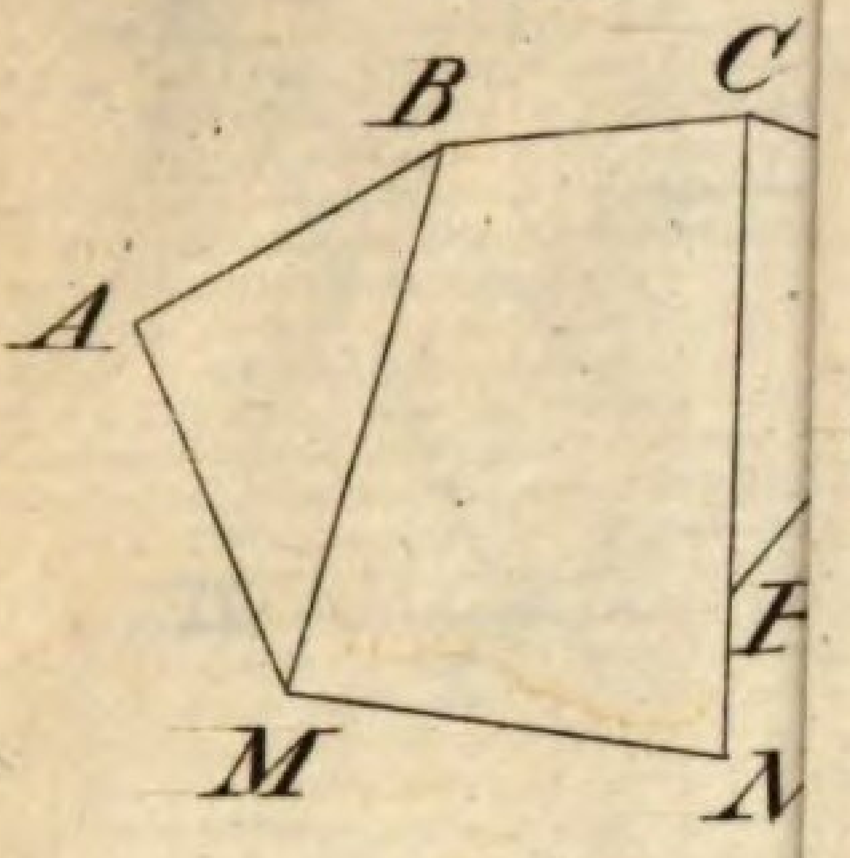
56
59
60
61
65
66
70
73
74
75

81
82
85
86
92
93
94
89
X
A′
G
C
E
Z
A
B
C
D
E
M
m
n
f
F
g
G
c
O
H
P
Z

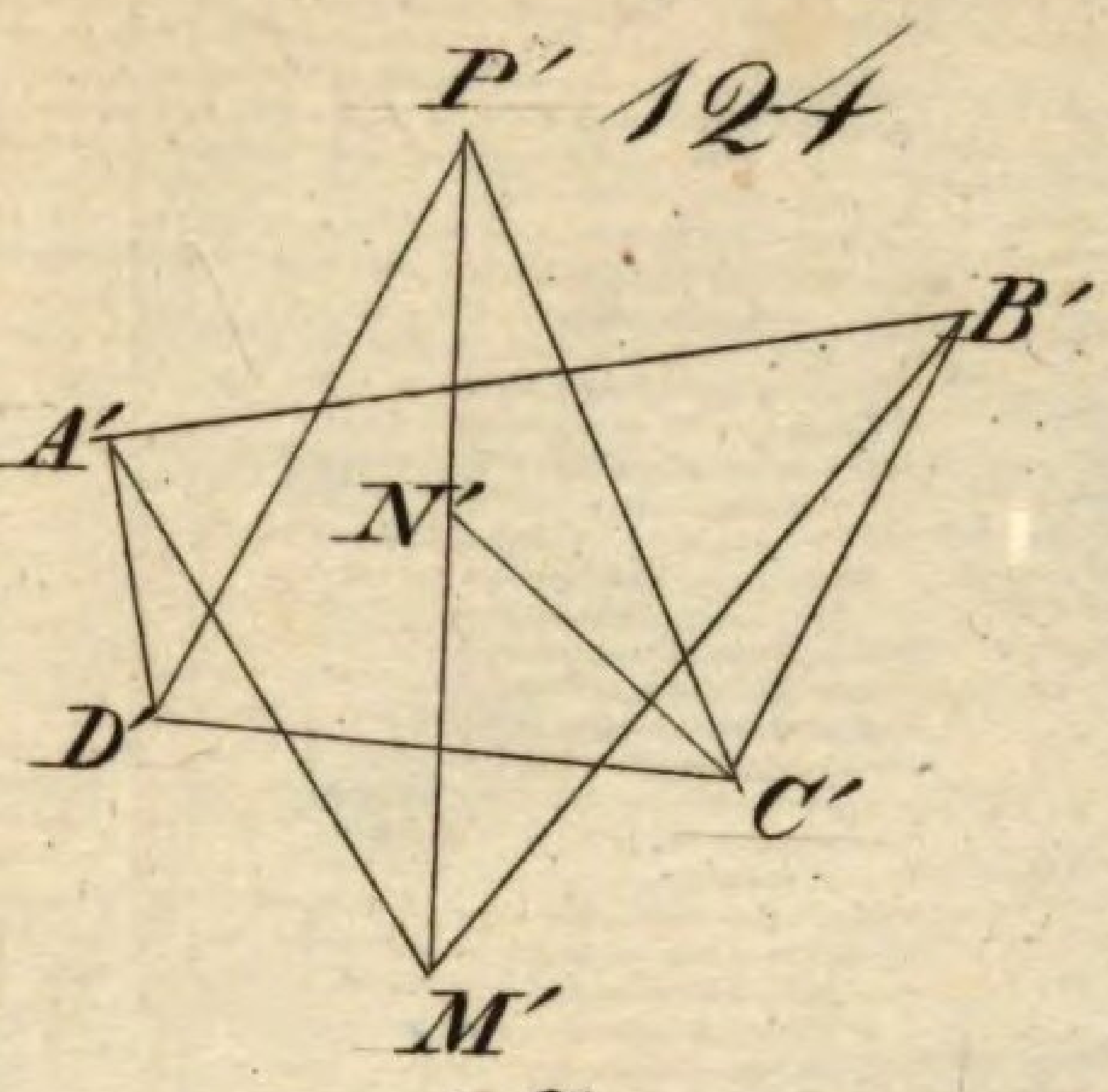
95
99
100
102
103
104

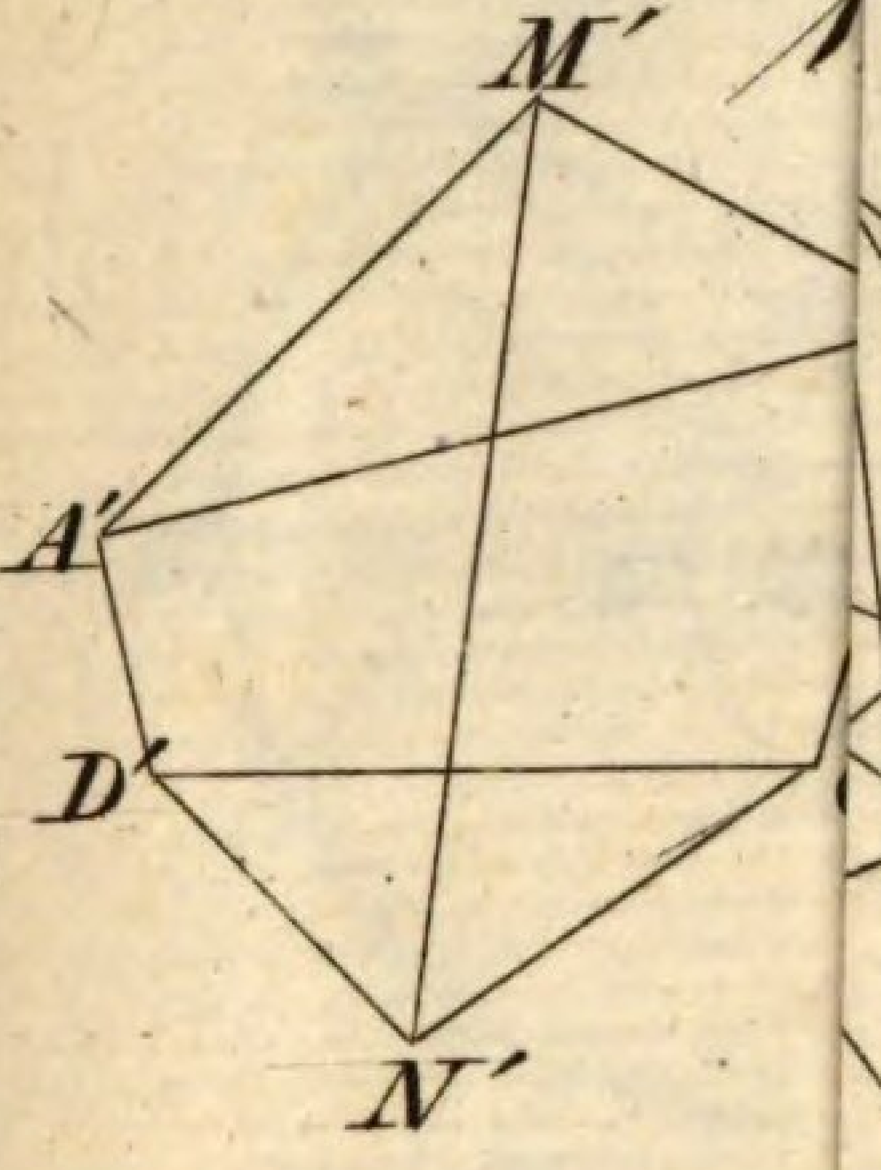
105
D
E
F
γ
F
P
f
108
D
a
C
E
F
B
F
g
A
10
A′
D
C
B
A
O′
112
B
C
A
M
b
c
N
A′
M′
113
N′
B′
116
B′
P′
N′
C
D′
117
K
B
C
A
l
k
H
M
M′
120
A′
D′
C′
B′
N′
c′
b′

121

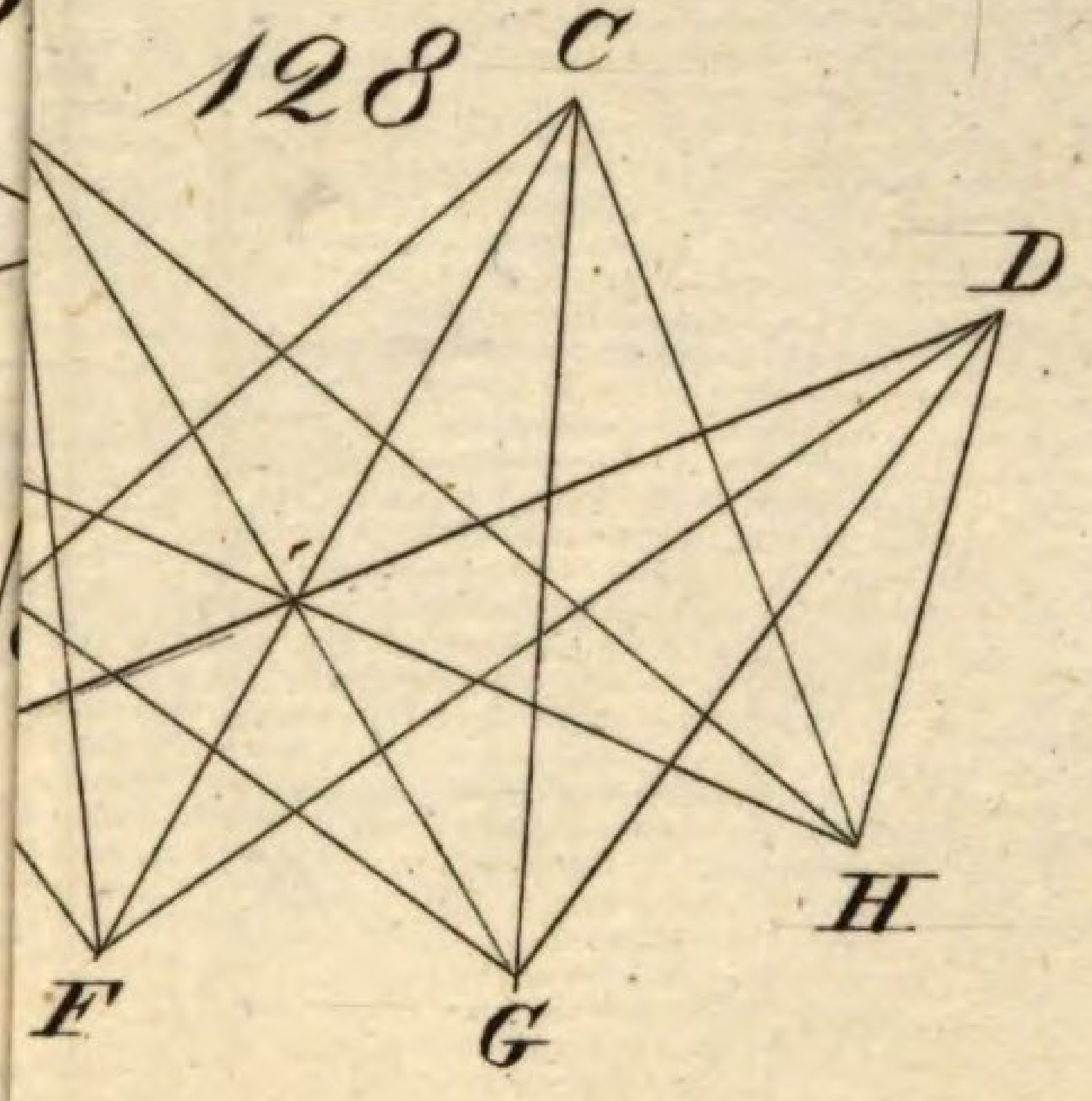


124

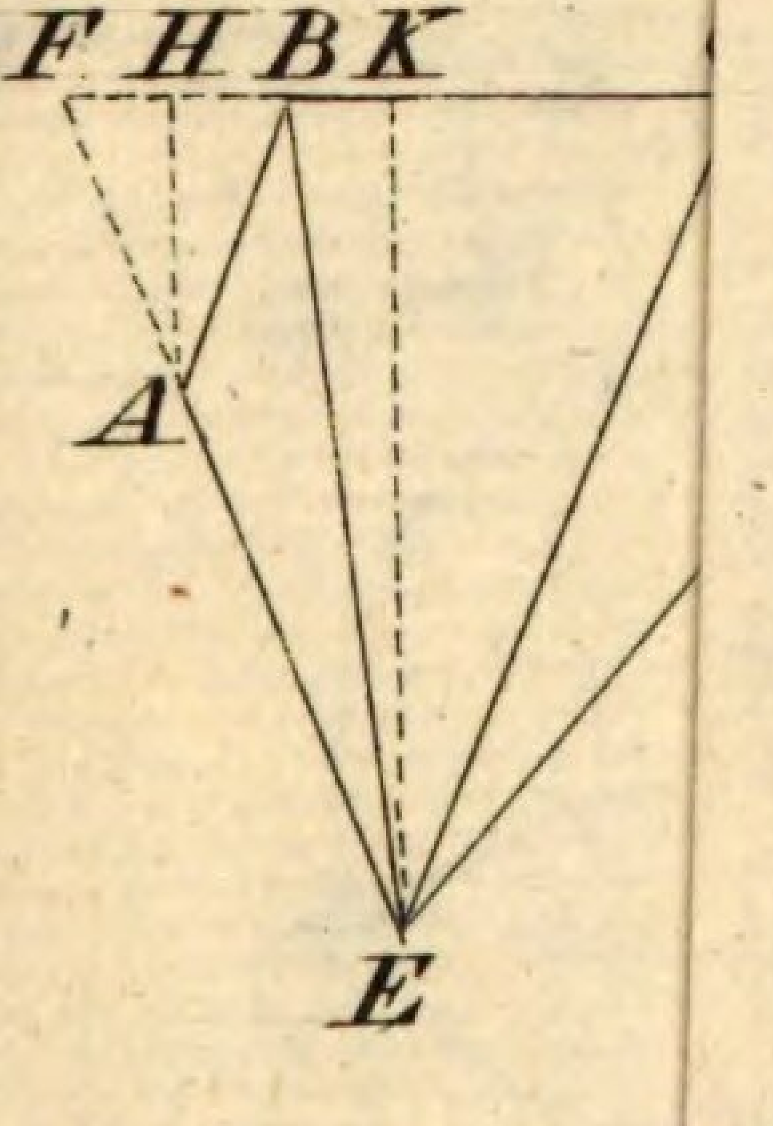




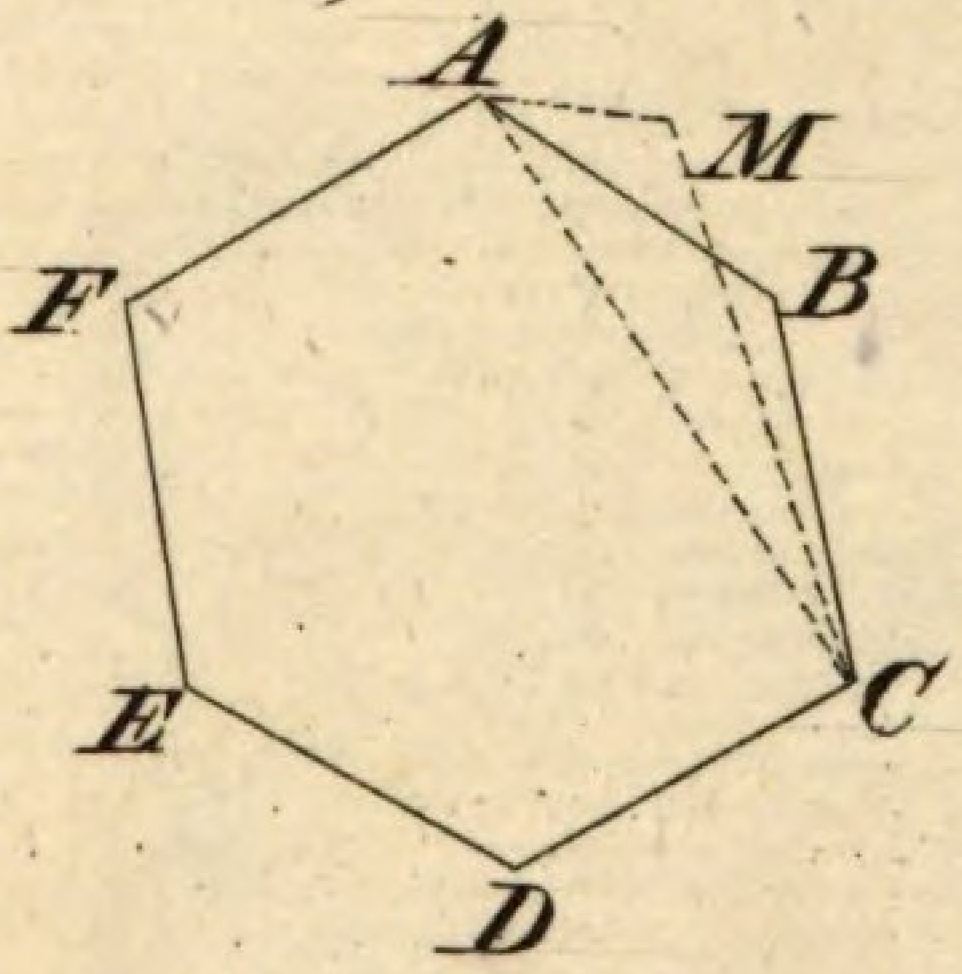
128



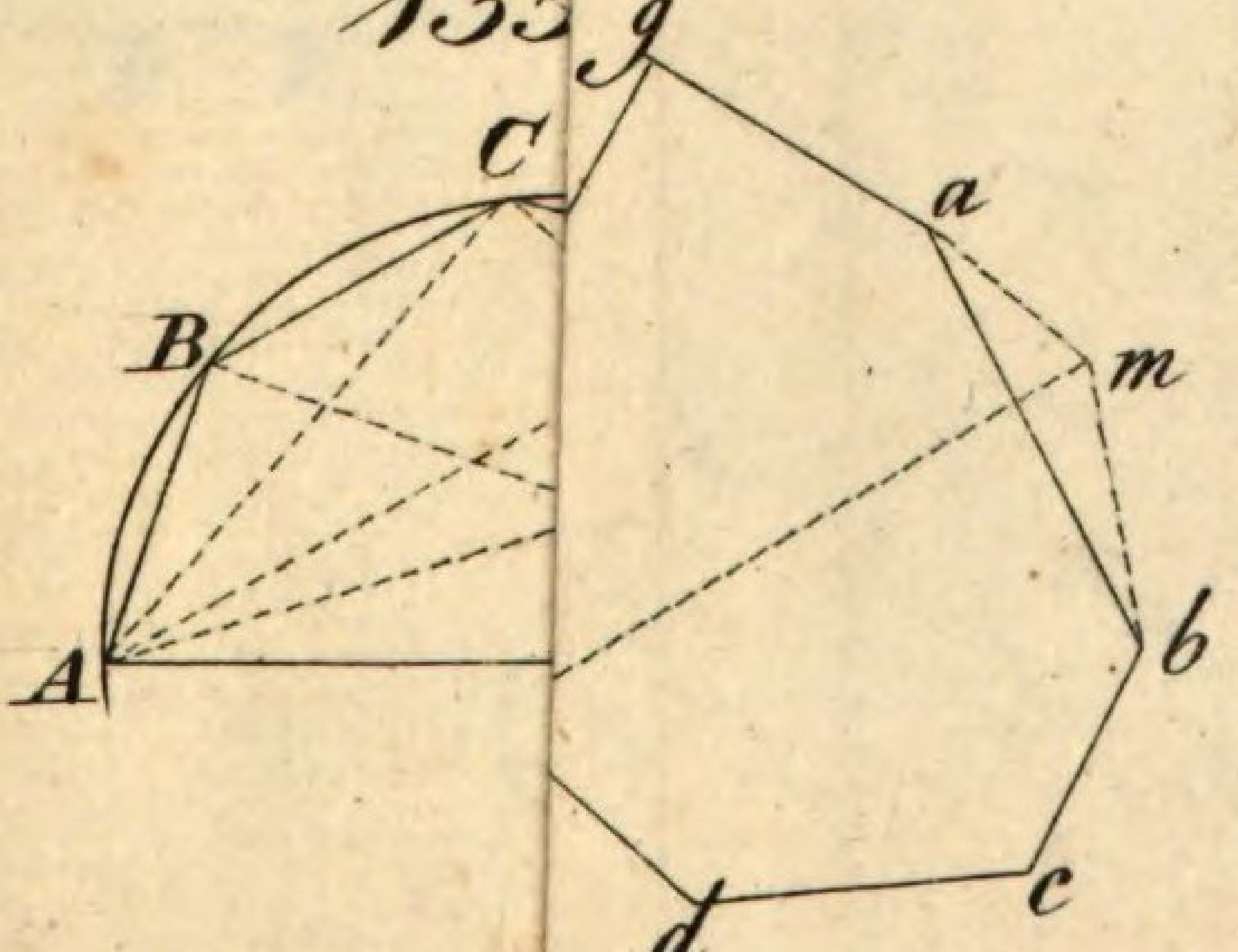
129



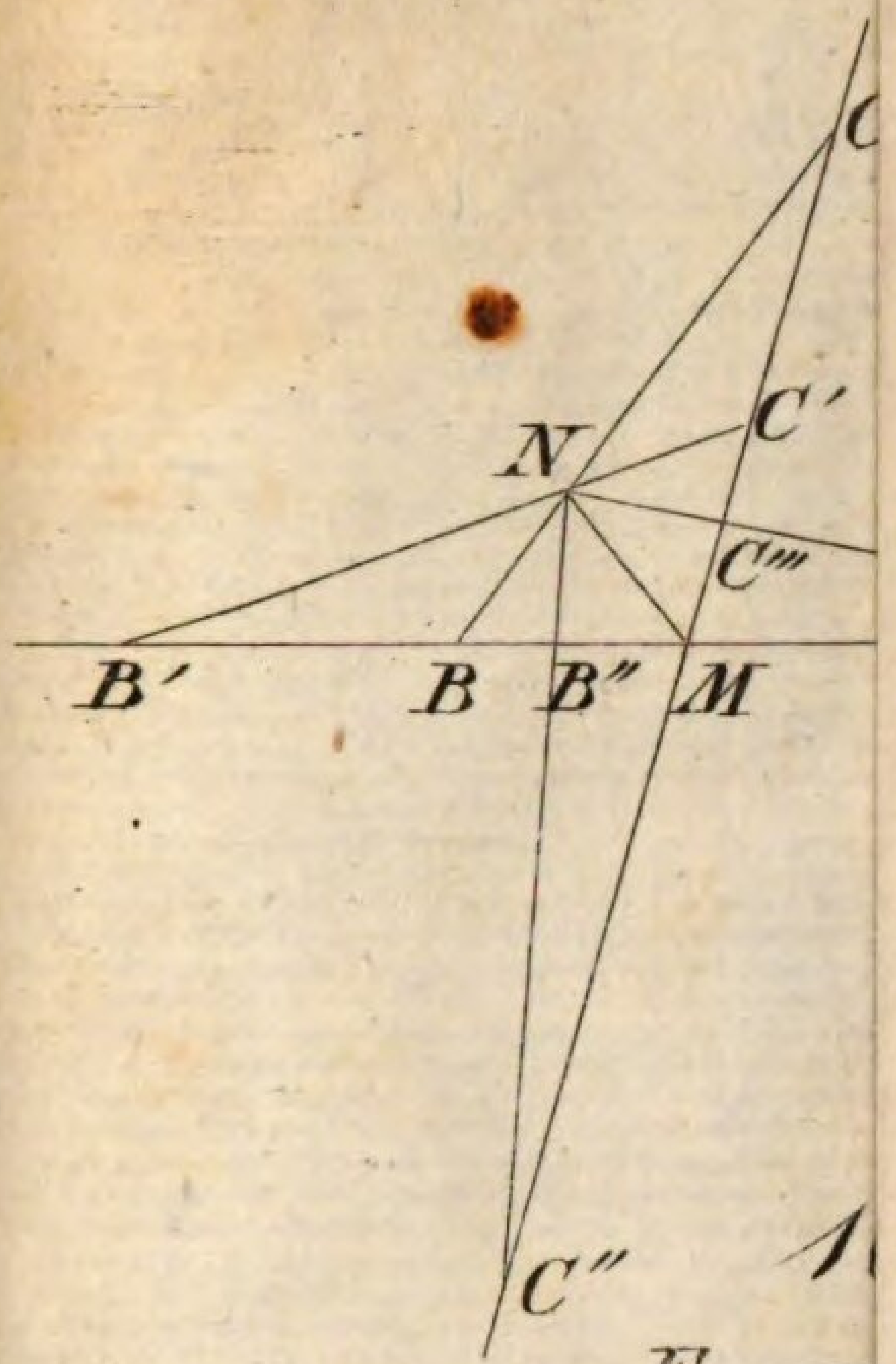
134

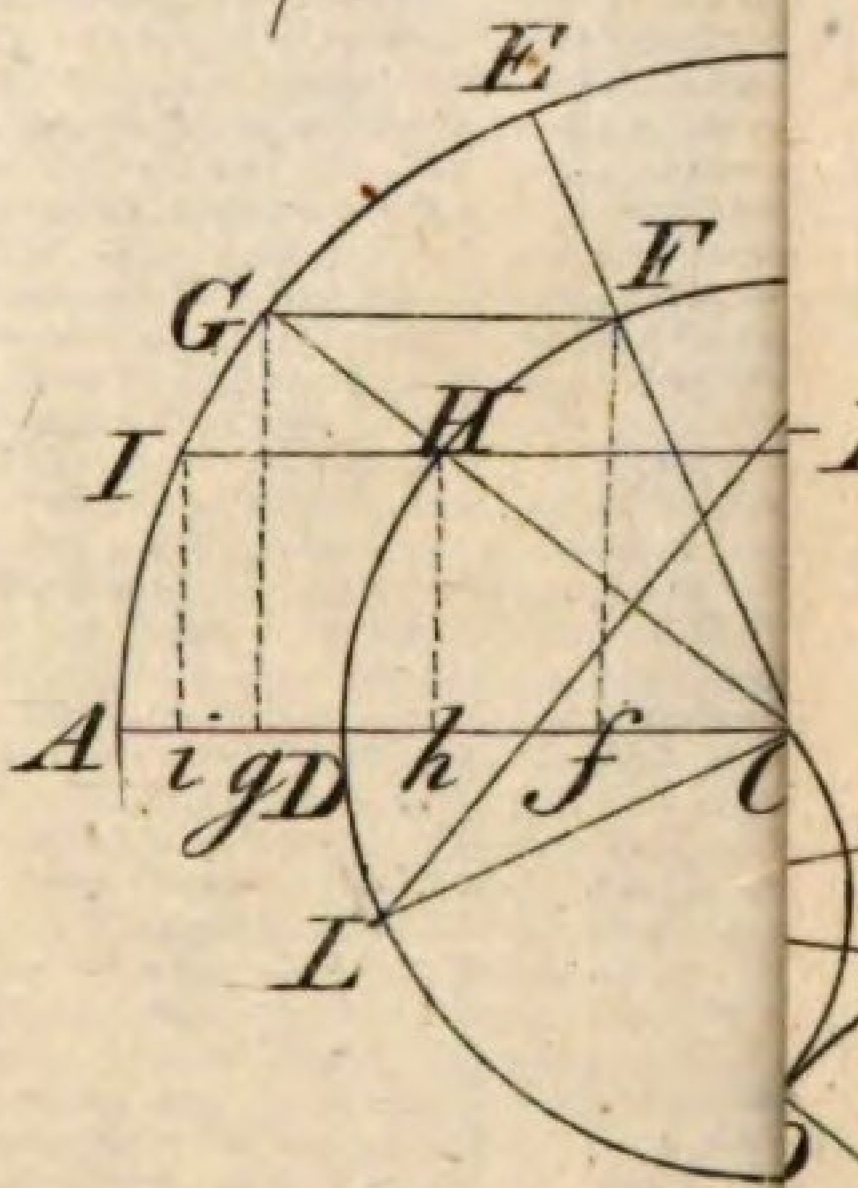


135

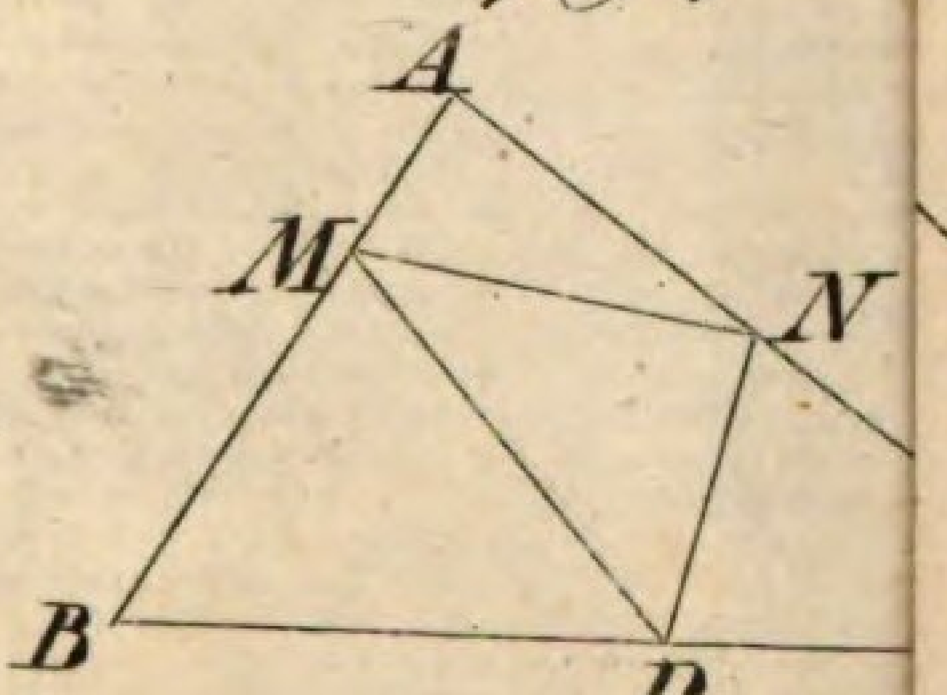


138
141
142
145
149
156
155
A C M F G I E H D B K O

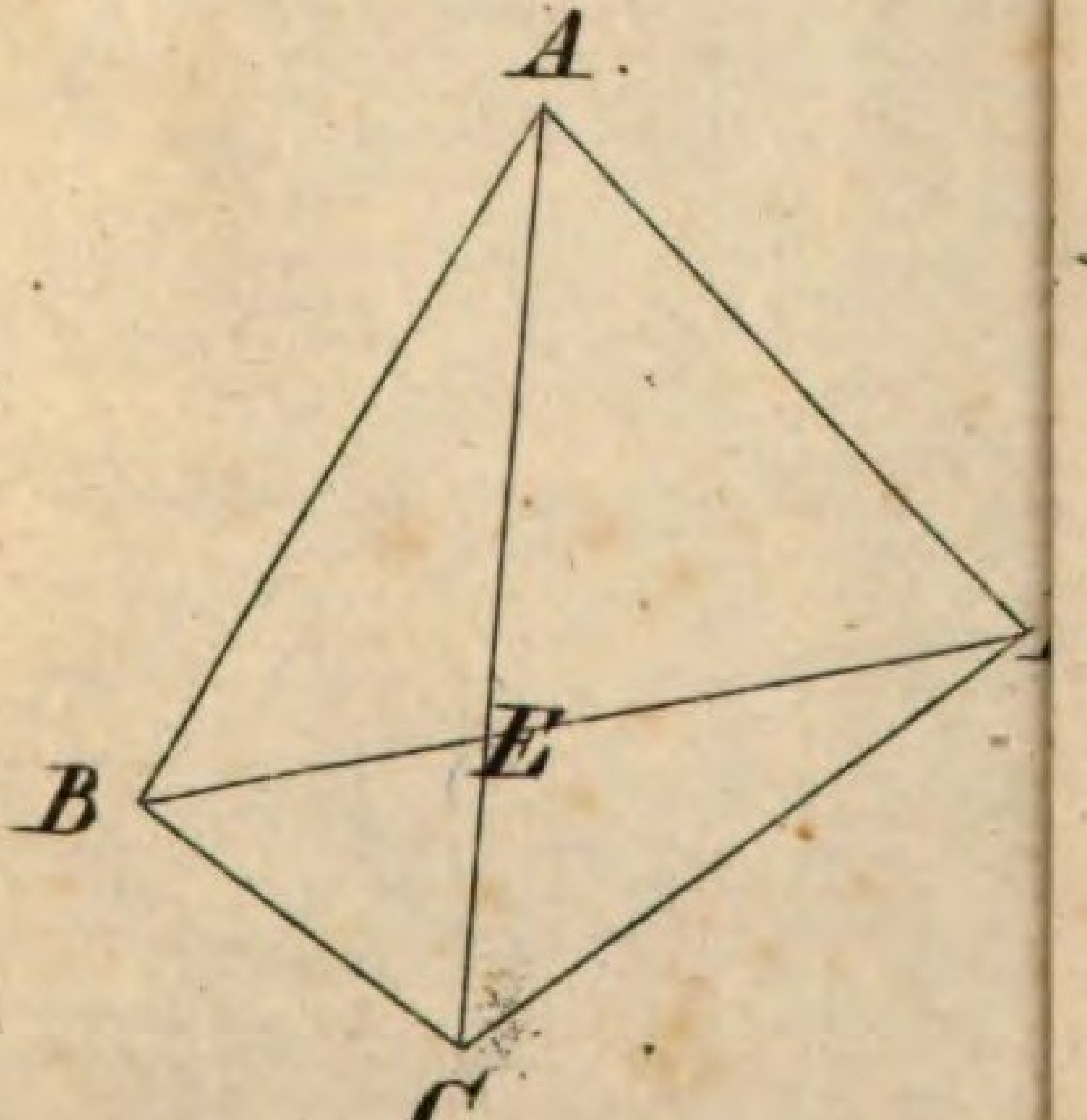




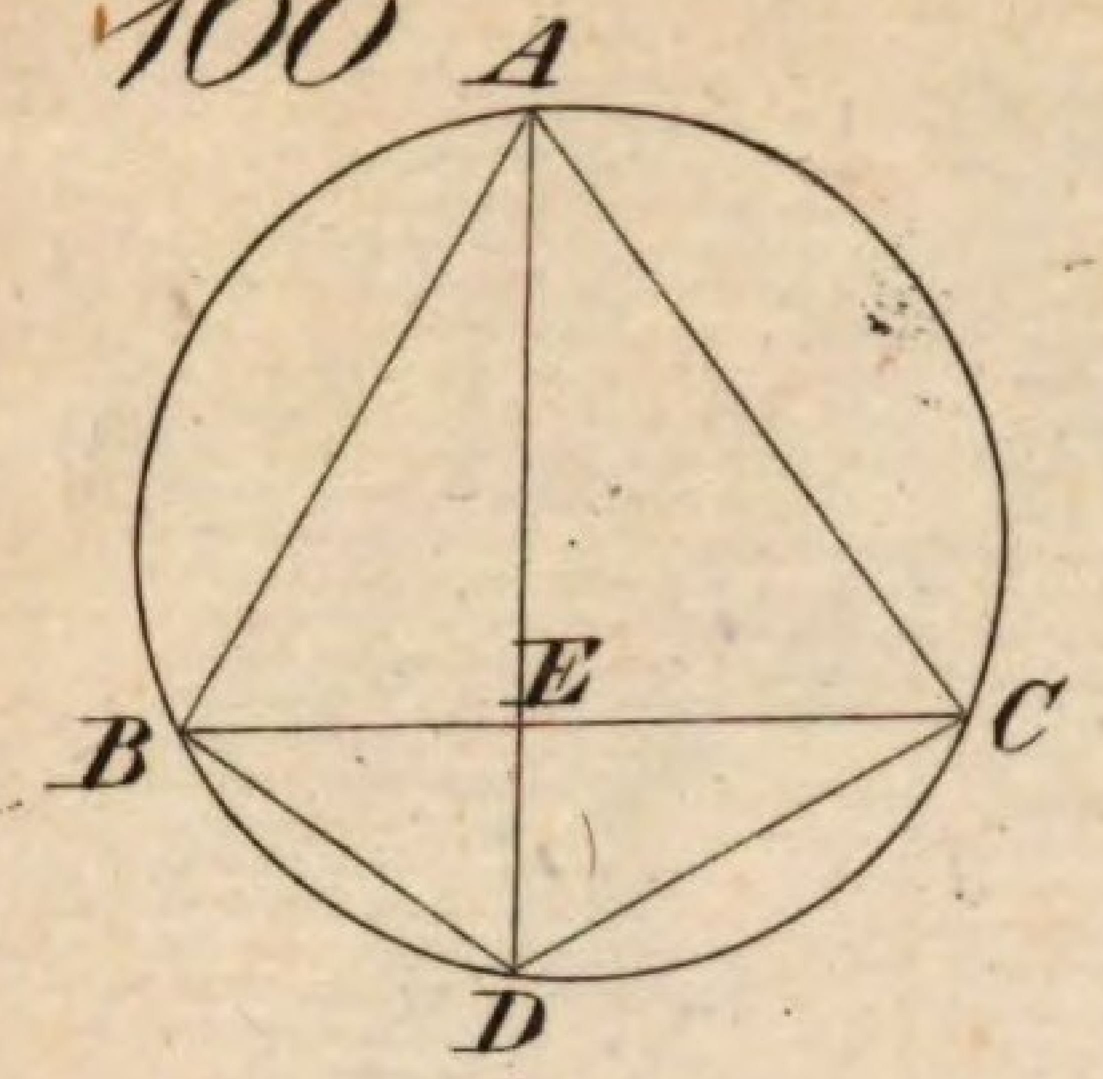
164



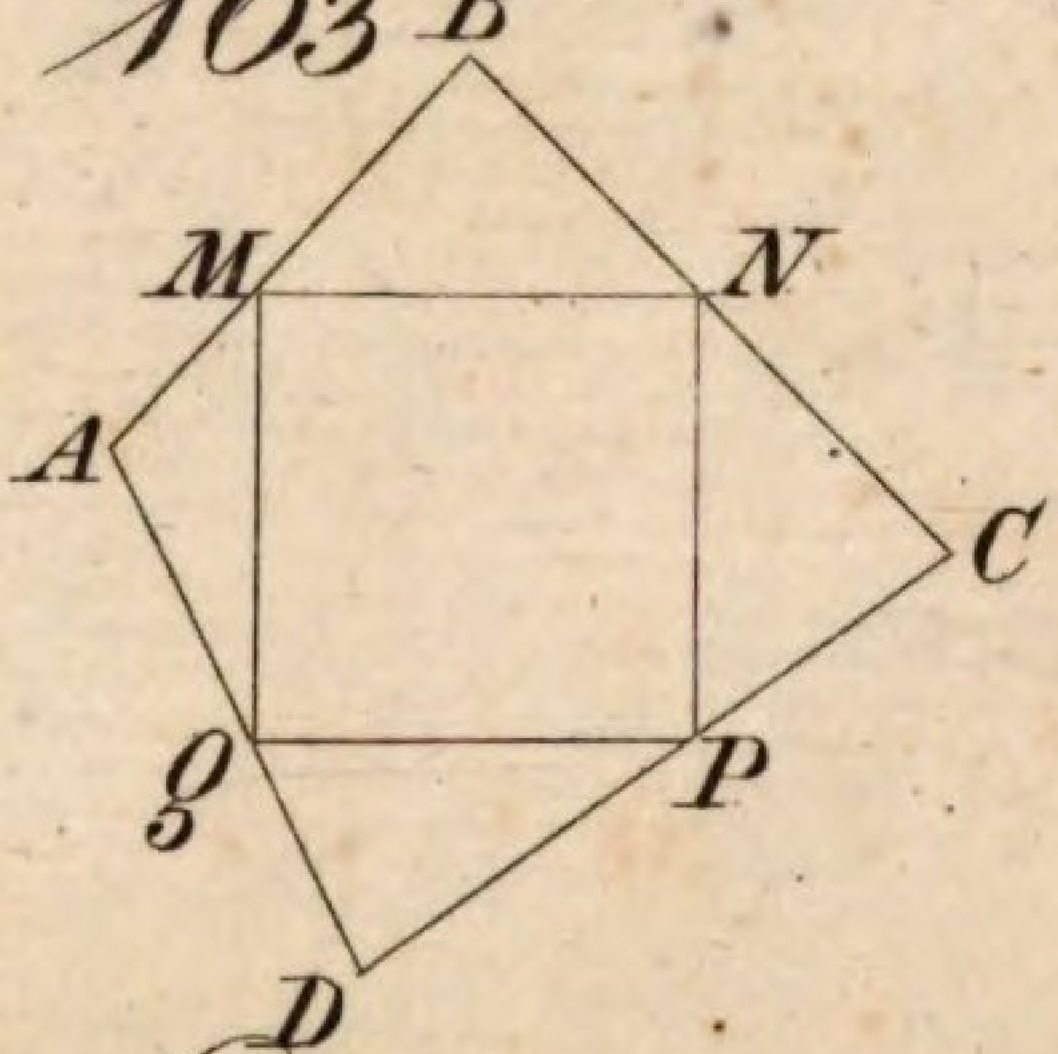
168



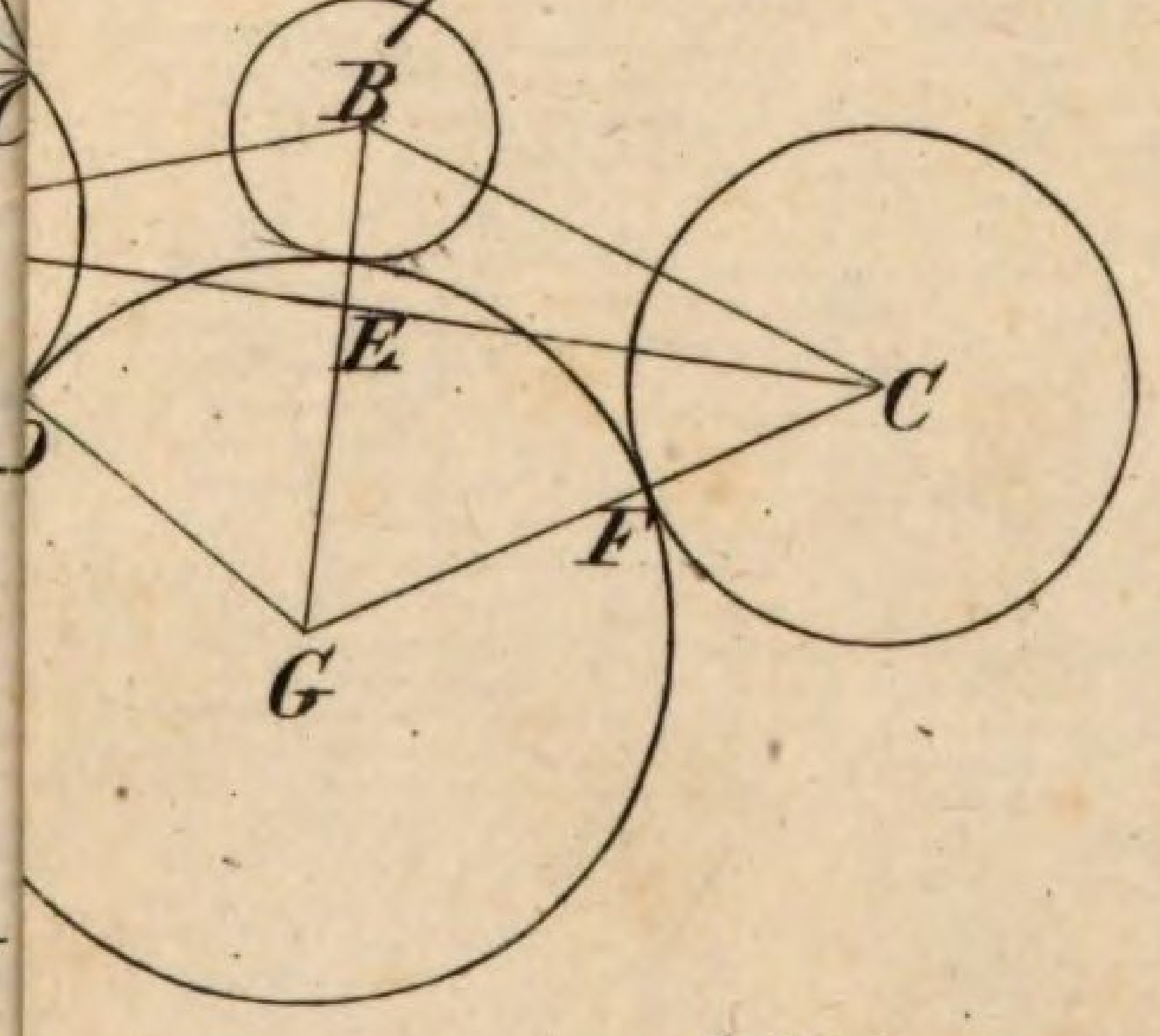
160



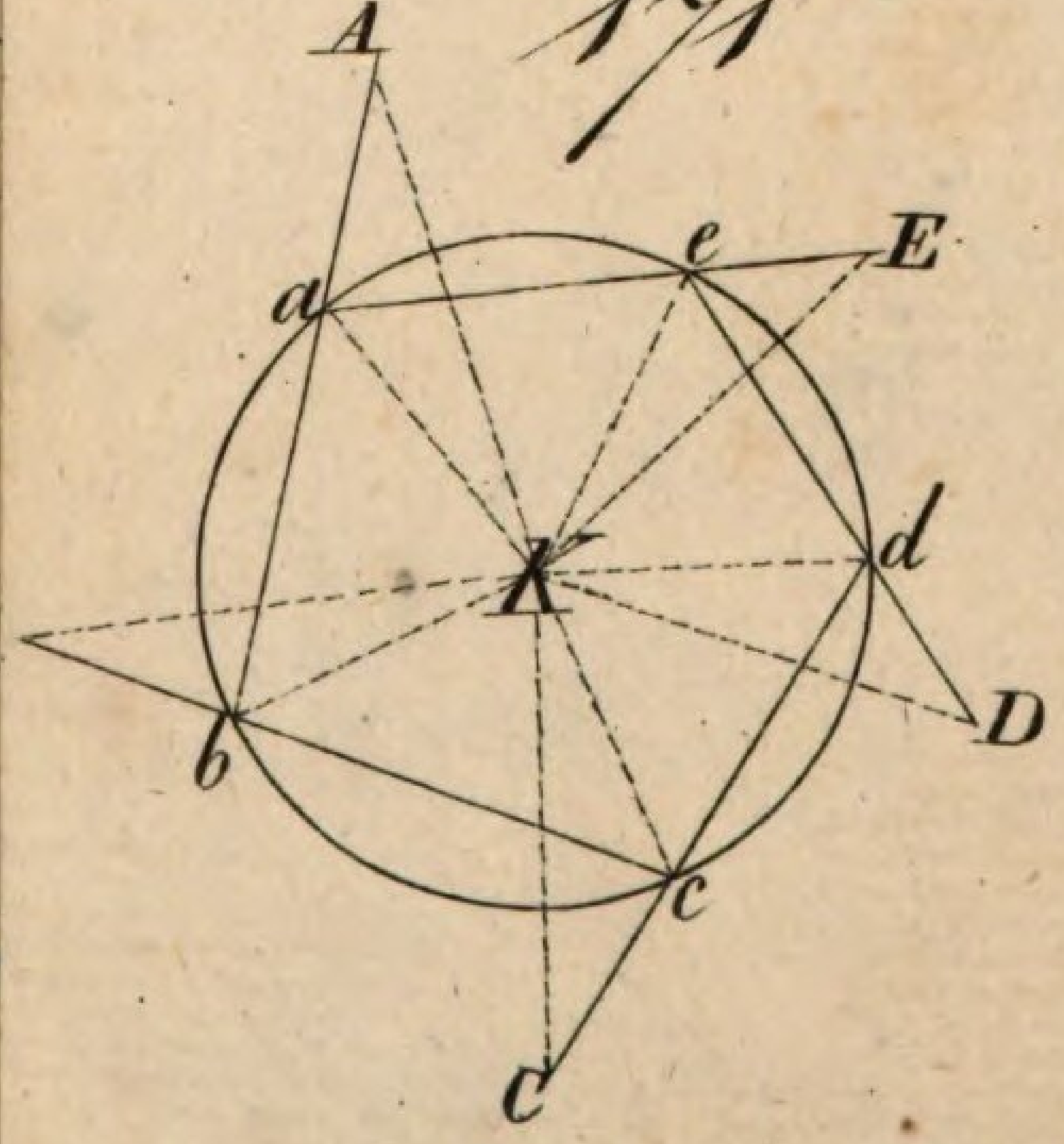
163



167



171



BAYER.
STAATSBIBL.
MÜNCHEN

10

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hirsch, Meier, 1765-1851

Sammlung geometrischer Aufgaben

Bd.: 1

Berlin 1805

Math.p. 222-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082016-6